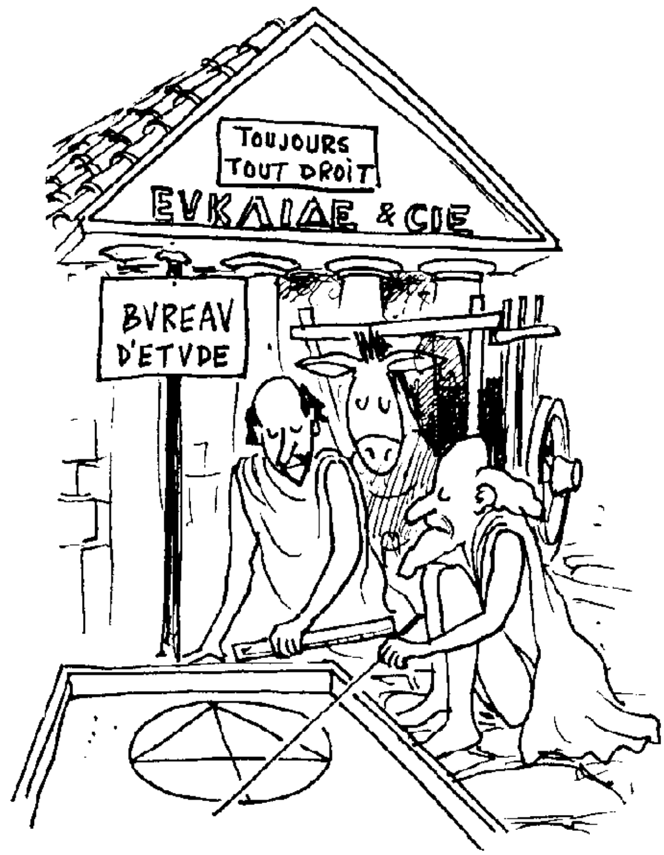
Savoir sans Frontières

Οι περιπέτειες του Ζαχαρία Τουλούμπα

Η Γεωμετρία

Jean-Pierre Petit



Μετάφραση: Λένα Βλασταρά

http://www.savoir-sans-frontieres.com

Jean-Pierre Petit, Πρόεδρος του Συλλόγου

Πρώην διευθυντής του Διεθνούς Κέντρου Επιστημονικής Έρευνας, αστροφυσικός και ιδρυτής ενός νέου είδους: της Επιστημονικής Εικονογράφησης (Κομικς).
Το 2005 αποφάσισε να δημοσιοποιήσει είκοσι από τα έργα του, μοιράζοντας τα δωρεάν στο Διαδίκτυο. Ίδρυσε επίσης το σωματείο Γνώσεις χωρίς Σύνορα (Savoir sans Frontières) που είχε ως στόχο να μοιράζει δωρεάν τις γνώσεις σε όλο τον κόσμο συμπεριλαμβανομένου και των επιστημονικών και τεχνικών γνώσεων. Το σωματείο, που λειτουργεί χάρη σε εισφορές, αμείβει τους μεταφραστές με 150 ευρώ (το 2006) και χρεώνεται επίσης τα έξοδα της τραπεζικής μεταφοράς. Καθημερινά μεγάλος αριθμός μεταφραστών αυξάνει το νούμερο των μεταφρασμένων άλμπουμ (μέχρι το 2005 είχαν μεταφραστεί σε 18 γλώσσες, εκ των οποίων μία ήταν τα κινιαρουάντα και μία άλλη τα λαοτινά)
Ολόκληρο ή μέρος του παρόντος αρχείου pdf μπορεί να φωτοτυπηθεί, να αναπαραχθεί ελεύθερα και να χρησιμοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς στα μαθήματά τους με την προϋπόθεση ότι αυτά τα εγχειρήματα δεν έχουν κερδοσκοπικό χαρακτήρα. Μπορεί να τοποθετηθεί στις δημοτικές,

σχολικές και πανεπιστημιακές βιβλιοθήκες είτε σε εκτυπωμένη, είτε σε ηλεκτρονική μορφή.
Ο συγγραφέας έχει αναλάβει να συμπληρώσει αυτή τη συλλογή με άλμπουμ πιο απλά (επιπέδου 12 χρόνων). Επίσης προετοιμάζει «ομιλούντα» άλμπουμ για τους αναλφάβητους και δίγλωσσα για να μαθαίνονται και άλλες γλώσσες πέρα από τη γλώσσα προέλευσης.
Το σωματείο ψάχνει διαρκώς νέους μεταφραστές οι οποίοι να μεταφράζουν στη μητρική τους γλώσσα και να κατέχουν τις κατάλληλες τεχνικές γνώσεις ώστε να παράγουν καλές μεταφράσεις των άλμπουμ.
Οι εισφορές (με επιταγή στο όνομα Savoir sans frontiers) είναι επίσης καλοδεχούμενες.
Οι πόροι του σωματείου το 2006 προορίζονται κυρίως για τις νέες μεταφράσεις.

Για να επικοινωνήσετε με το σωματείο επισκεφτείτε την ιστοσελίδα:

www.savoir-sans-frontieres.com

International Bank Account Number (IBAN) :

FR 16 20041 01008 1822226V029 88

Bank Identifier Code (BIC) :

PSSTFRPPMAR

Τα καταστατικά της ένωσης είναι προσιτά στον καθένα (στα γαλλικά) στην παραπάνω ιστοσελίδα. Τα οικονομικά είναι επίσης διαθέσιμα σε πραγματικό χρόνο. Η ένωση δεν κρατάει κανένα ποσό από τις δωρέες πέρα από τα έξοδα των τραπεζικών καταθέσεων έτσι ώστε οι μεταφραστές να λαμβάνουν ακέραιο το ποσό της αμοιβής τους.

Η ένωση δεν πληρώνει κανένα από τα μέλη της τα οποία είναι όλα εθελοντές και επιβαρύνονται των εξόδων λειτουργίας της και κυρίως της διαχείρησης της ιστοσελίδας. Έξοδα στα οποία δε μπορεί να ανταποκριθεί από μόνη της η ένωση.

Με αυτό τον τρόπο, εάν προσφέρετε κάποιο ποσό σε αυτό το ανθρωπιστικό και πολιτιστικό έργο, μπορείτε να είστε σίγουροι ότι θα διατεθεί ***αποκλειστικά*** στην πληρωμή των μεταφραστών.

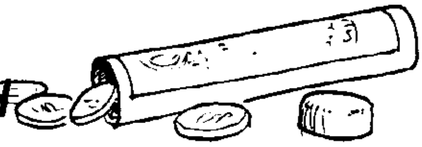
Δημοσιεύουμε κατά μέσο όρο δέκα μεταφράσεις το μήνα.

ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΣΗ:

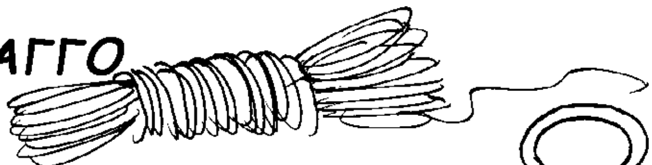
ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΥΤΕ ΜΙΑ ΠΡΑΜΑΤΕΙΑ, ΟΥΤΕ ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑ. ΕΙΝΑΙ ΑΠΛΑ, Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΖΑΧΑΡΙΑ ΤΟΥΛΟΥΜΠΑ ΣΕ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΤΑΞΙΔΙΑ ΤΟΥ ΣΤΗ ΧΩΡΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΤΕΙ ΚΑΤΑ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ:

*ΠΡΩΤΑ ΜΕ ΑΣΠΙΡΙΝΗ

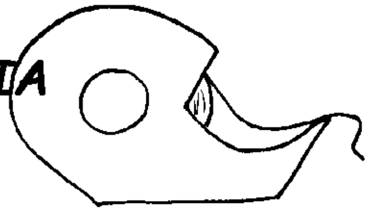


*ΕΠΕΙΤΑ ΜΕ ΣΠΑΓΓΟ

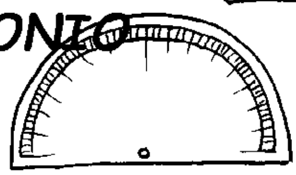


*ΜΕ ΨΑΛΙΔΙ

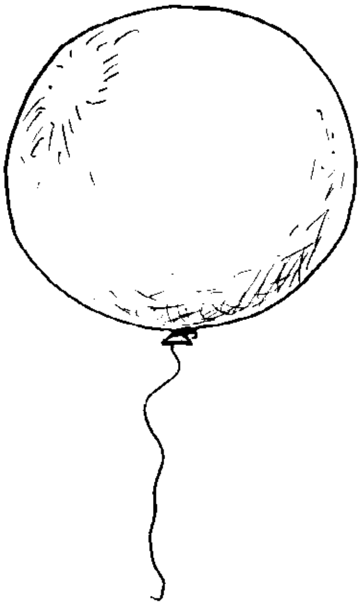
*ΜΕ ΚΟΛΛΗΤΙΚΗ ΤΑΙΝΙΑ



*ΜΕ ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟ

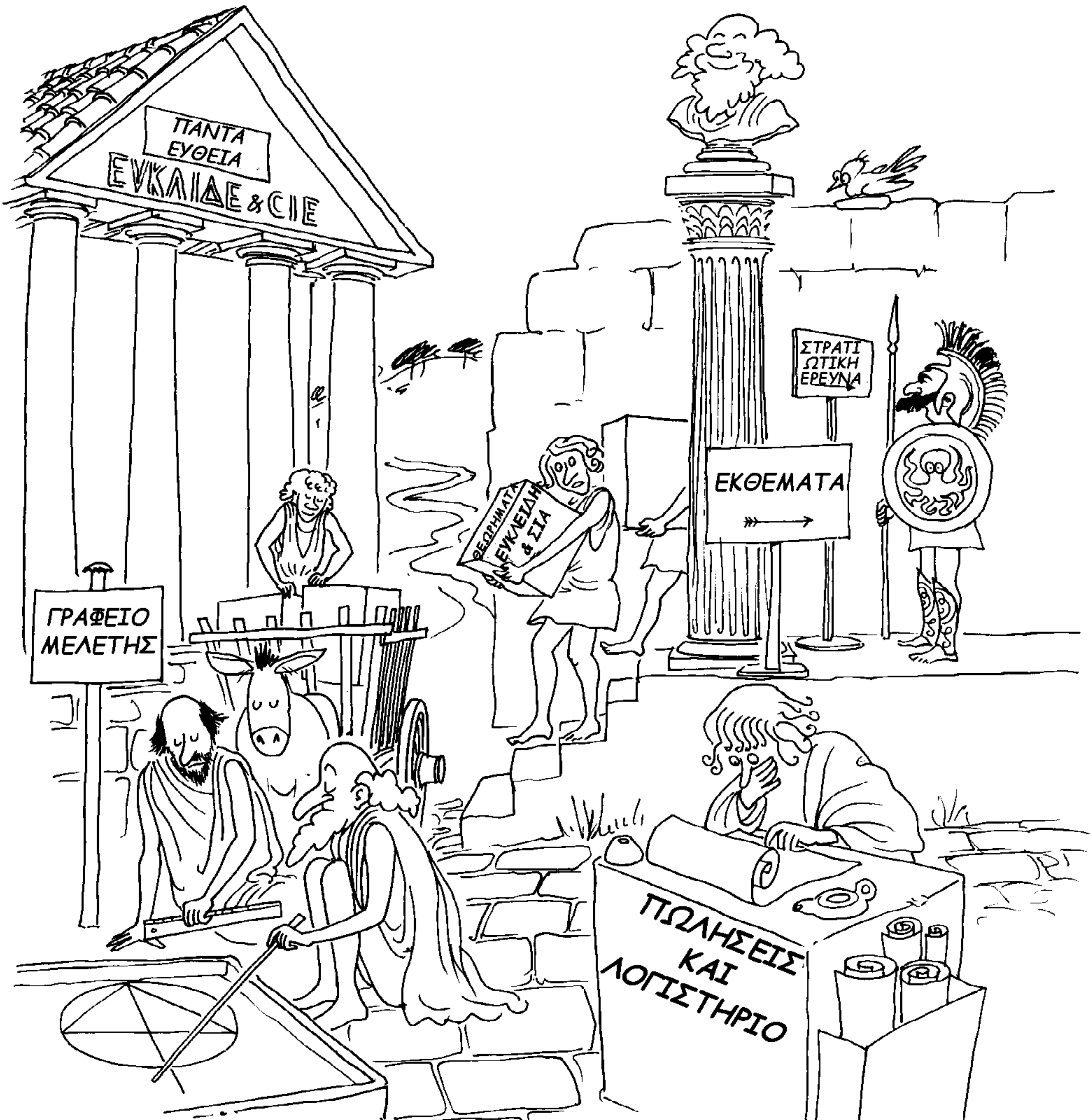


*ΚΑΙ ΕΝΑ ΧΑΡΙΤΩΜΕΝΟ ΜΠΑΛΟΝΙ



ΟΣΟ ΓΙΝΕΤΑΙ ΠΙΟ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ....

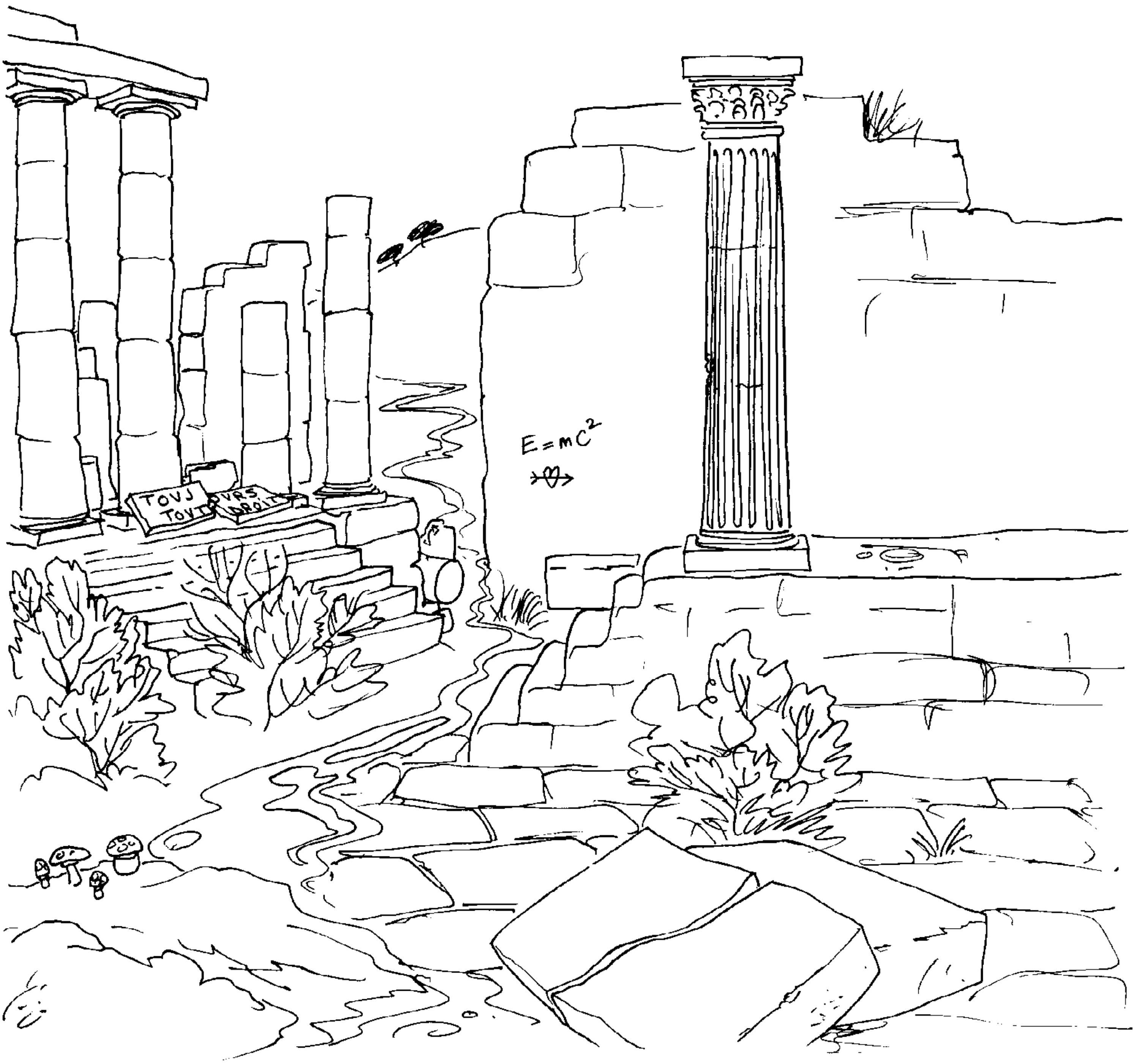
Η Ευκλείδια κοινωνία και Σία γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια τον τρίτο αιώνα Προ Χριστού. Για δύο χιλιάδες διακόσια χρόνια τα πράγματα άνθιζαν. Τα γινόμενα είχαν υπολογιστεί και η πελατεία ήταν ευχαριστημένη και πιστή.



Αλλά καιρό με τον καιρό τα γούστα των πελατών άλλαζαν. Κάποιοι που άλλοτε ήταν τυφλά αφοσιωμένοι στον Ευκλείδη όταν δίψασαν για καινούριες εμπειρίες άρχισαν να αναρωτιούνται:

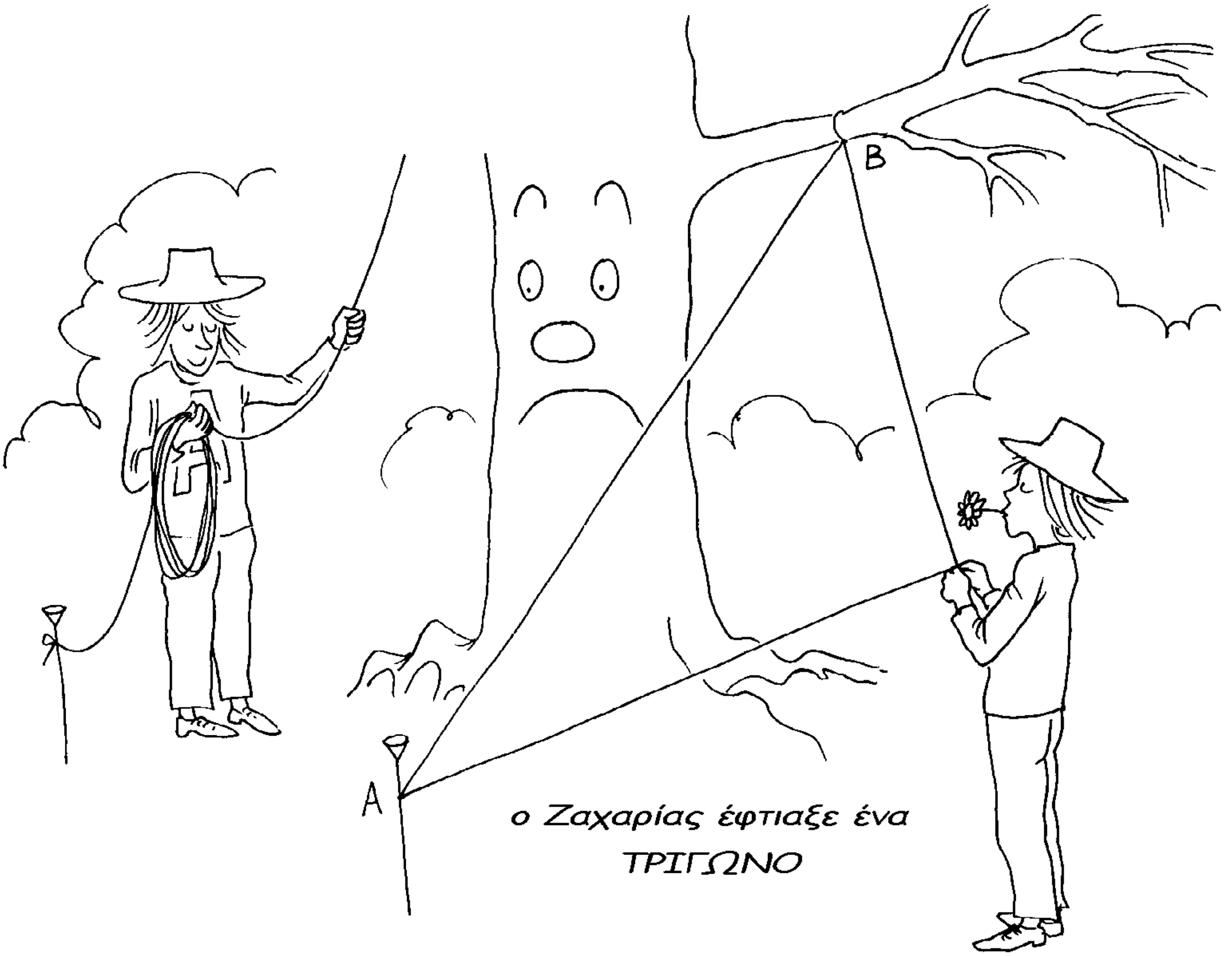
«Είναι στ' αλήθεια παντού ο Ευκλείδης και υπάρχει άραγε κάτι ακόμη καλύτερο;»

Την ιστορία ενός από αυτούς θα διηγηθούμε εδώ...

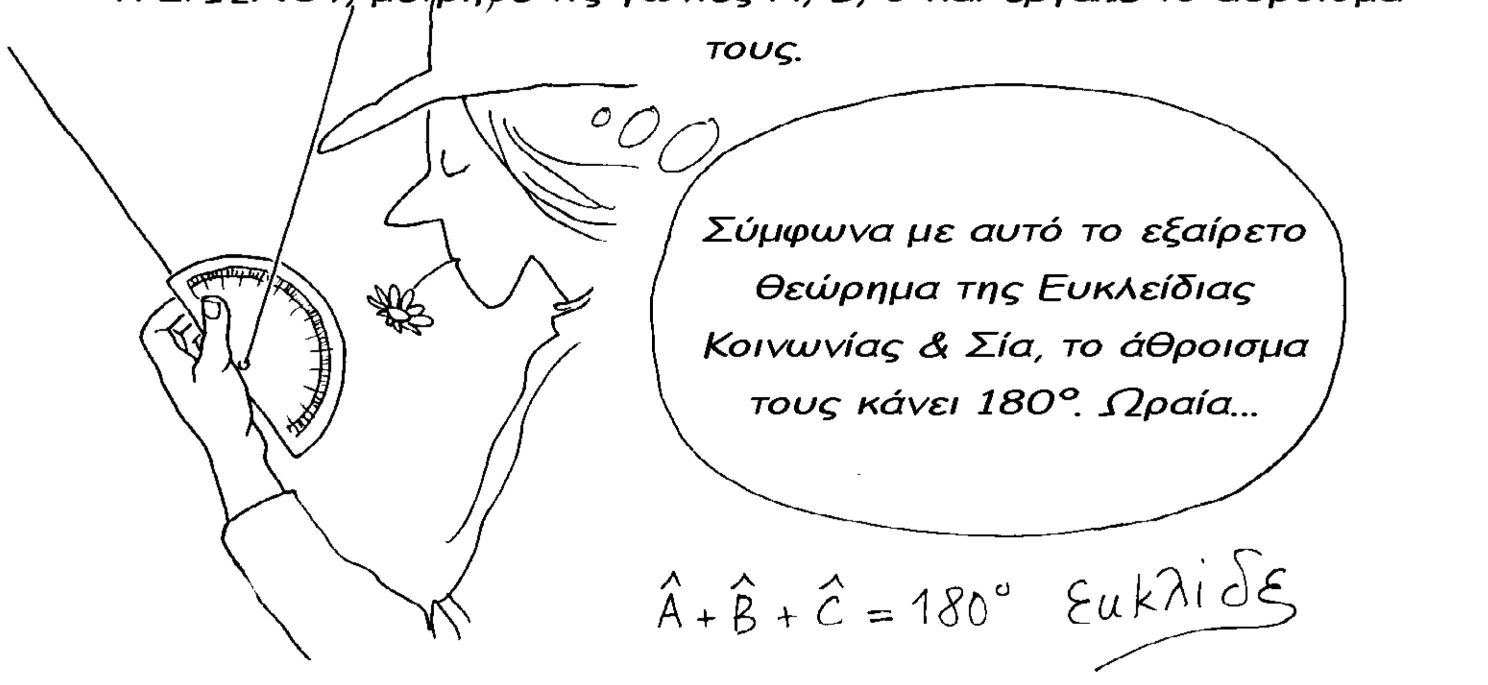


ΠΡΟΛΟΓΟΣ: *Μια μέρα, ο Ζαχαρίας Τουλούμπας αποφάσισε να τεντώσει ένα σπάγγο ο οποίος ήταν δεμένος ανάμεσα σε δύο παλούκια:*

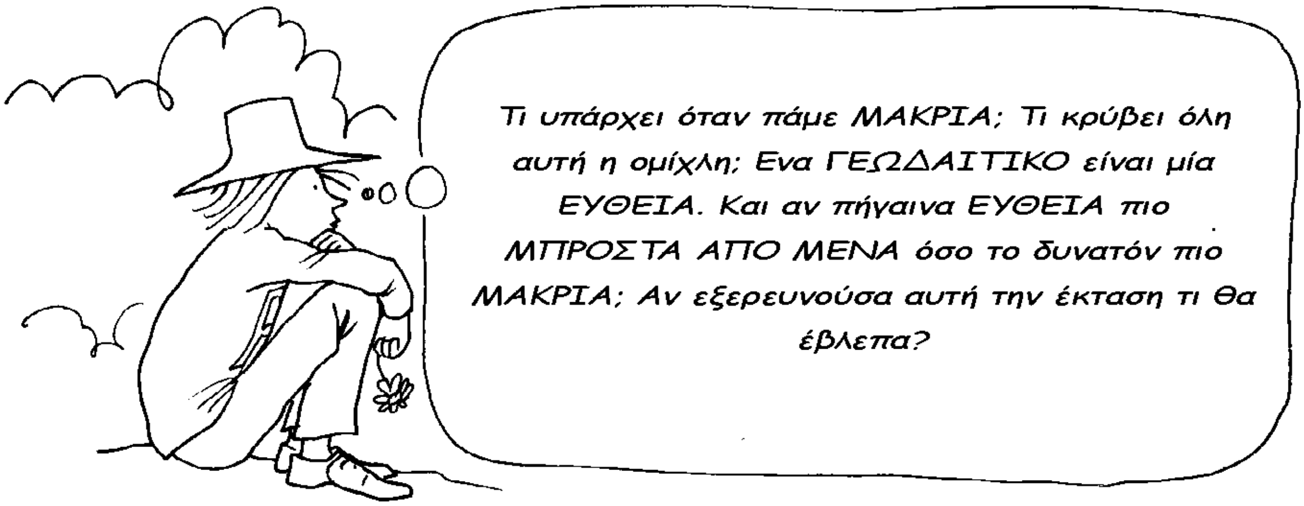
Με τρία τεντωμένα νήματα, δηλαδή με τρία ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ,

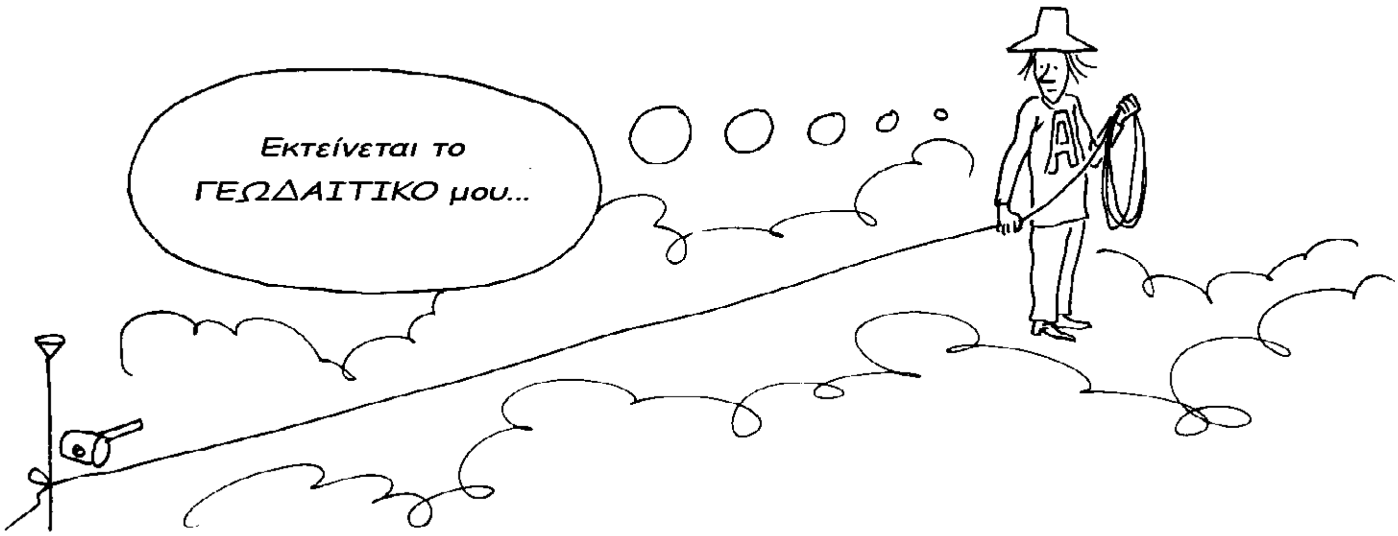


Προσαρμόζοντας το μοιρογνωμόνιό του σε κάθε κορυφή αυτού του ΤΡΙΓΩΝΟΥ, μέτρησε τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ και έβγαλε το άθροισμά τους.



Ο κόσμος στον οποίο ζούσε ο Ζαχαρίας ήταν υπερβολικά ομιχλώδης. Έχανε η μάνα το παιδί και το παιδί τη μάνα.

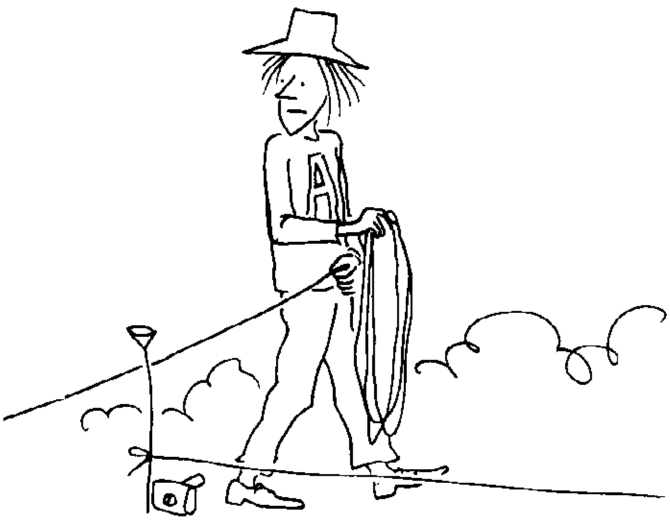




Ο Ζαχαρίας προχωρούσε για πολύ καιρό, για πάρα πολύ...
Πίσω του ξεδιπλωνόταν ο σπάγγος του τόσο καλά τεντωμένος, ξεγελώντας έτσι τις όποιες αμφιβολίες γεννούσαν τα βήματα μέσα στην ομίχλη. Κατασκεύασε ένα άψογο ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ.

Δεν ξέρω αν το έχετε παρατηρήσει αλλά είναι κάποιες μέρες που όλα μοιάζουν να πηγαίνουν στραβά.

Ο Ζαχαρίας που είχε ακόμη σπάγγο αποφάσισε να διαφωτίσει αυτό το γεγονός.



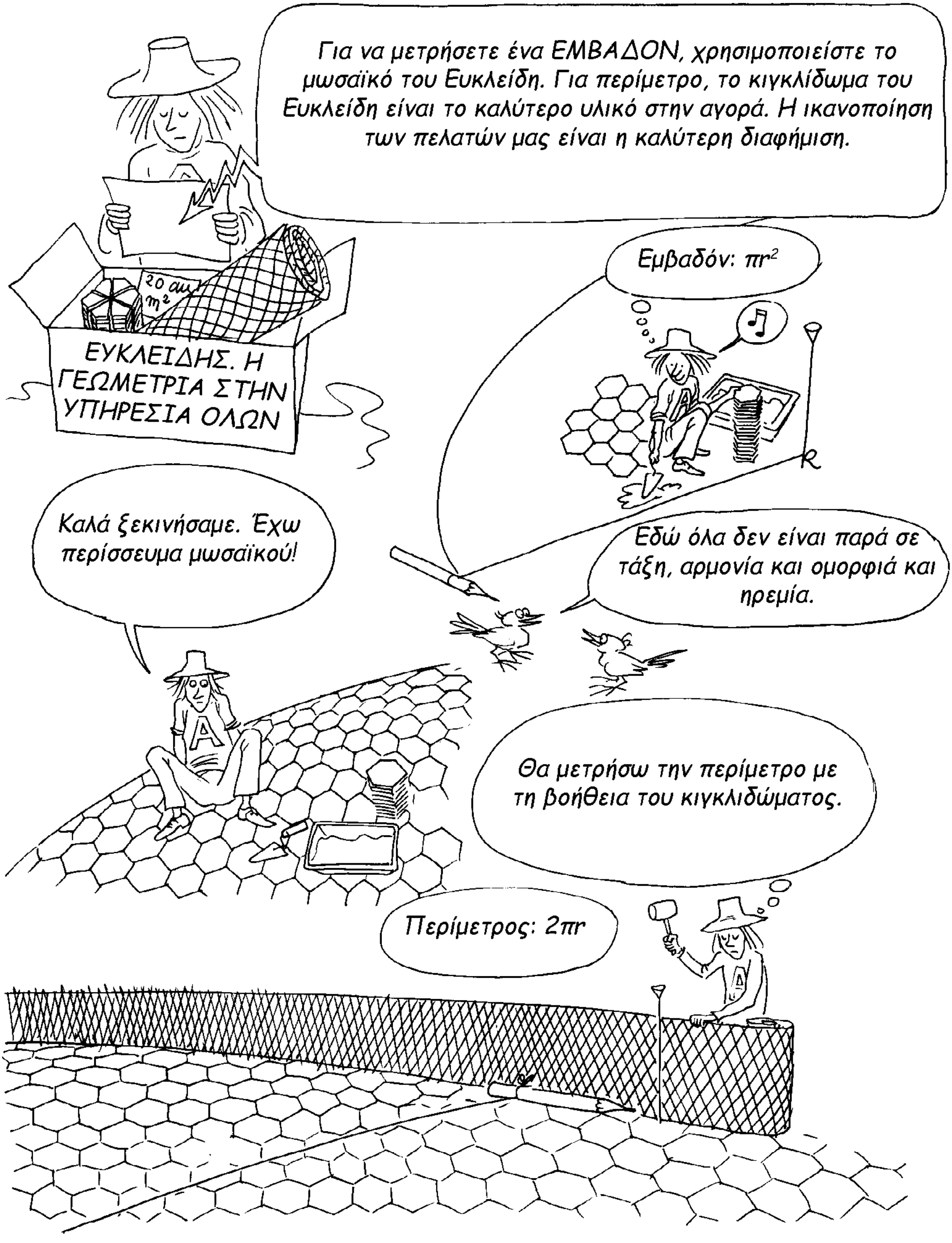
Συνέχισε λοιπόν ατάραχος να τεντώνει το σπάγγο του ΕΥΘΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ γεμάτος περιέργεια.

Επιτέλους...

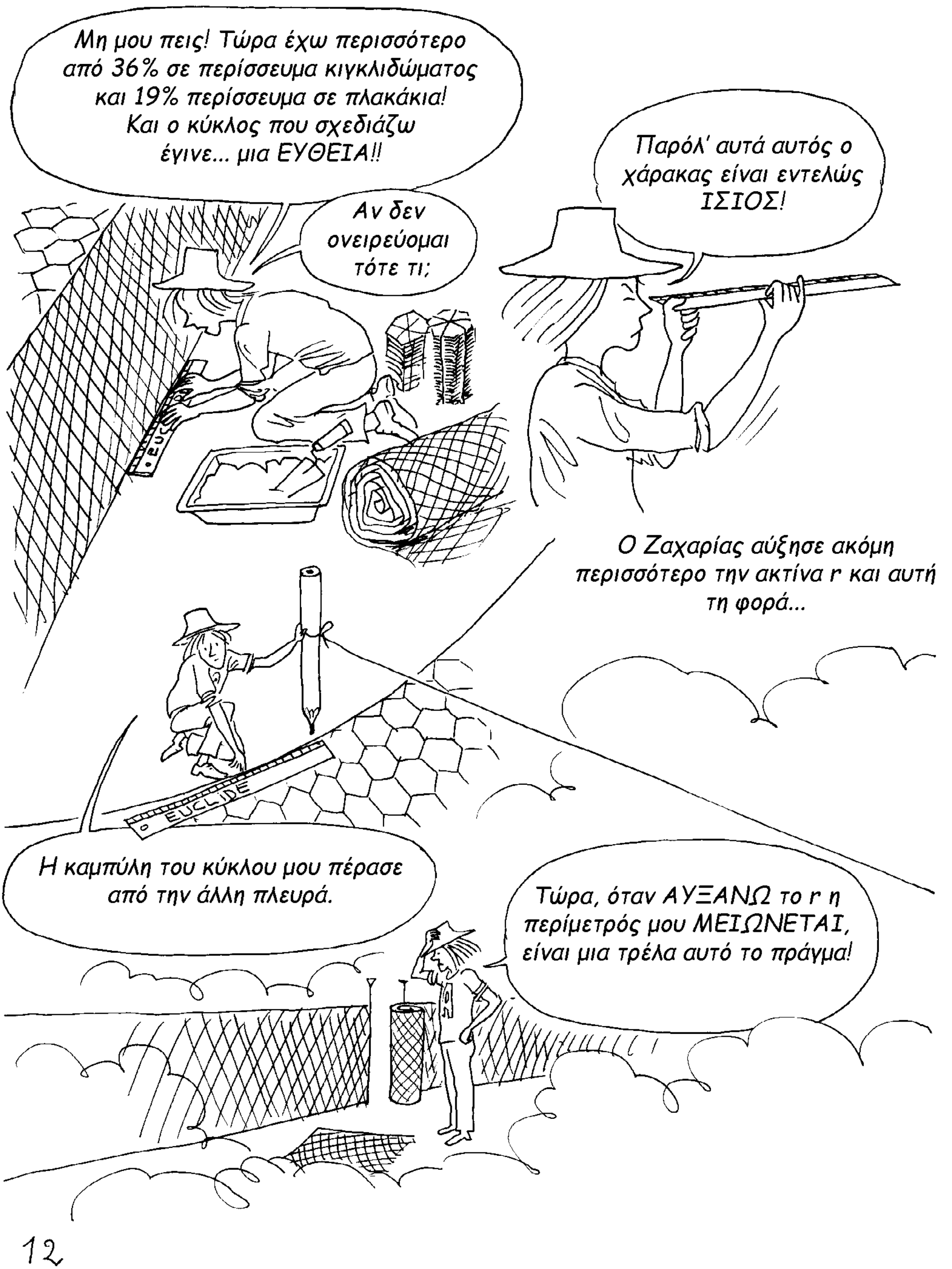
Η ΕΥΘΕΙΑ του Ζαχαρία ξαναέκλεινε!

*Σ.τ.Μ: "Η λογική όλα τα νικά". Λατινικά στο κείμενο.

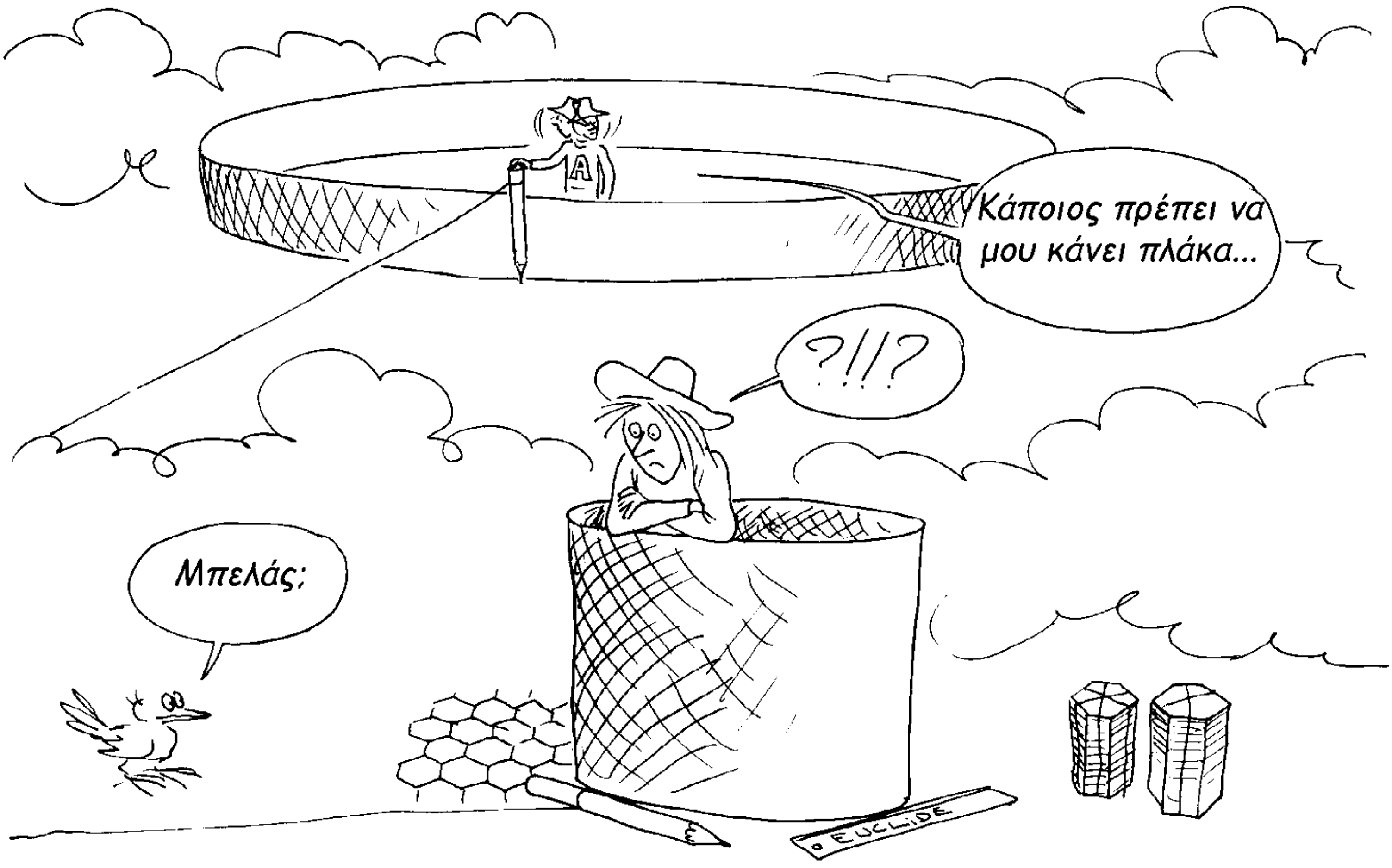

Ωστόσο, τοποθετώντας τον χάρακά μου εντελώς ΕΠΙΠΕΔΑ σιγουρεύομαι ότι τα νήματα μου ήταν ΙΣΙΑ.
EUCLIDE
Εμπρός; Το σπίτι Ευκλείδης; Ακούστε, έχω μπελάδες με το υλικό σας.
Ένα λεπτό, σας δίνω την τεχνική υπηρεσία.
Μπελάδες με τα τρίγωνά μας; Παράξενο. Γιατί δε δοκιμάζετε τους κύκλους μας; Οι πελάτες μας είναι πολύ ικανοποιημένοι με αυτούς.
Ένας κύκλος είναι λοιπόν, το σύνολο των σημείων τα οποία είναι τοποθετημένα σε μία απόσταση r από ένα σταθερό σημείο.
Λέτε λοιπόν: περίμετρος 2πr, ΕΜΒΑΔΟΝ: πr². Το σημείωσα.
r
Στη διάθεσή σας.


Για να μετρήσετε ένα ΕΜΒΑΔΟΝ, χρησιμοποιείστε το μωσαϊκό του Ευκλείδη. Για περίμετρο, το κιγκλίδωμα του Ευκλείδη είναι το καλύτερο υλικό στην αγορά. Η ικανοποίηση των πελατών μας είναι η καλύτερη διαφήμιση.
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΟΛΩΝ
Εμβαδόν: πr²
Καλά ξεκινήσαμε. Έχω περίσσευμα μωσαϊκού!
Εδώ όλα δεν είναι παρά σε τάξη, αρμονία και ομορφιά και ηρεμία.
Θα μετρήσω την περίμετρο με τη βοήθεια του κιγκλιδώματος.
Περίμετρος: 2πr


Έχω επίσης και περίσσευμα κιγκλιδώματος.
Εμπρός, το σπίτι Ευκλείδης; Ναι, πάλι εγώ είμαι! Έχω σημαντικά υπολείμματα μωσαϊκού ΚΑΙ κιγκλιδώματος. πr^2, $2\pi r$, δε δουλεύει καθόλου η υπόθεσή σας!
Μη φωνάζετε έτσι κύριε! Εγώ δεν είμαι παρά η γραμματέας! Σας δίνω την τεχνική υπηρεσία.
Όχι, όχι, τα πλακάκια είναι μια χαρά ενωμένα. Η ακτίνα μου είναι τελείως ευθεία και το κιγκλίδωμά μου είναι πολύ καλά τοποθετημένο πάνω στον ΚΥΚΛΟ!
Κύριε, πιστέψτε με, είναι η πρώτη φορά που συμβαίνει αυτό. Δοκιμάστε πάλι και μην ανησυχείτε. Ξέρετε καλά πως τα θεωρήματά μας είναι εγγυημένα.
Ο Ζαχαρίας συνέχισε λοιπόν την έρευνά του αυξάνοντας κάθε φορά την ακτίνα r του κύκλου του. Αλλά τα υπολείμματα ήταν όλο και πιο αξιοσημείωτα.


Μη μου πεις! Τώρα έχω περισσότερο από 36% σε περίσσευμα κιγκλιδώματος και 19% περίσσευμα σε πλακάκια! Και ο κύκλος που σχεδιάζω έγινε... μια ΕΥΘΕΙΑ!!
Αν δεν ονειρεύομαι τότε τι;
Παρόλ' αυτά αυτός ο χάρακας είναι εντελώς ΙΣΙΟΣ!
EUCLIDE
Ο Ζαχαρίας αύξησε ακόμη περισσότερο την ακτίνα r και αυτή τη φορά...
EUCLIDE
Η καμπύλη του κύκλου μου πέρασε από την άλλη πλευρά.
Τώρα, όταν ΑΥΞΑΝΩ το r η περίμετρός μου ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ, είναι μια τρέλα αυτό το πράγμα!

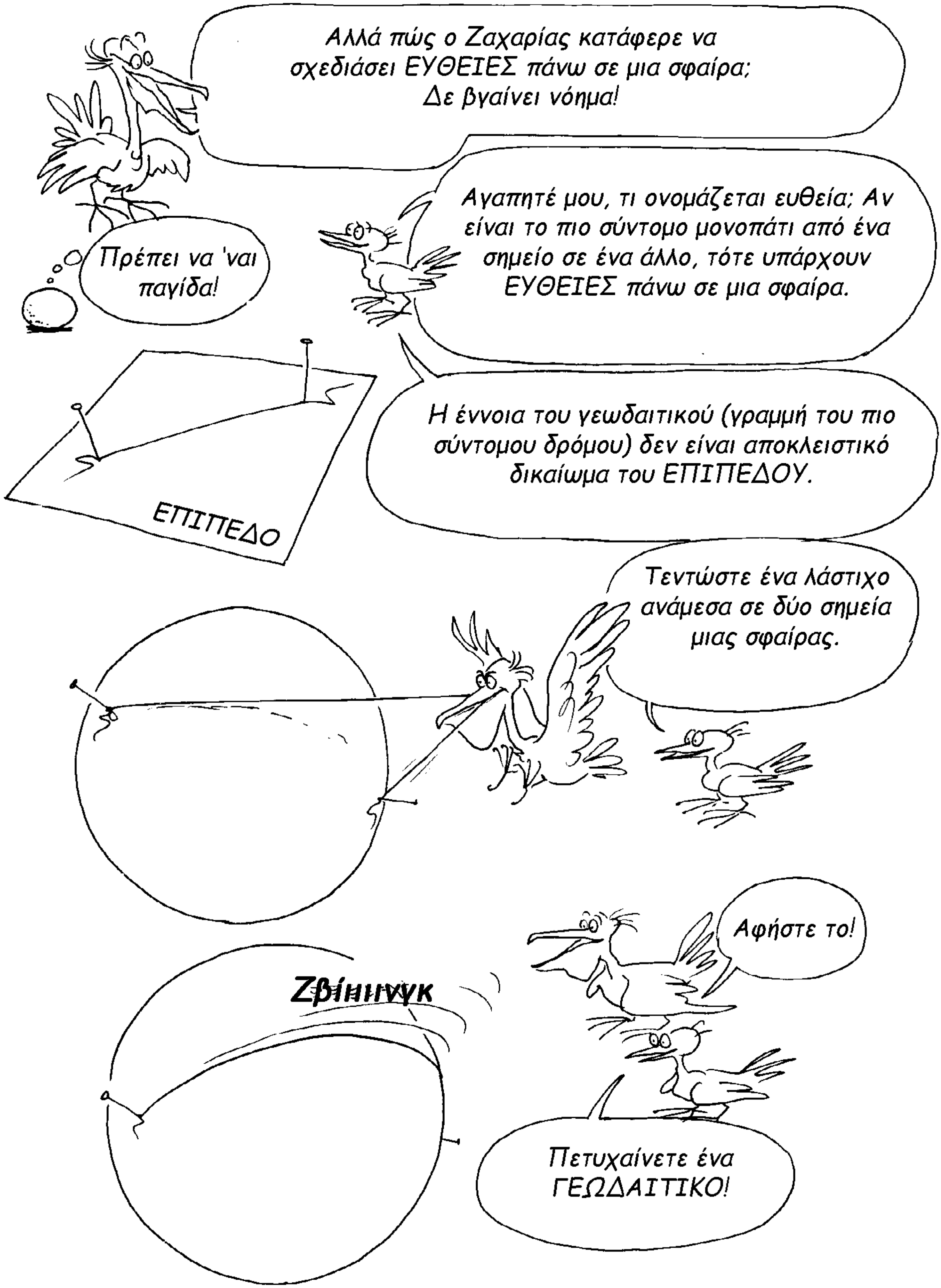
Μετά από μία τελευταία στρώση:



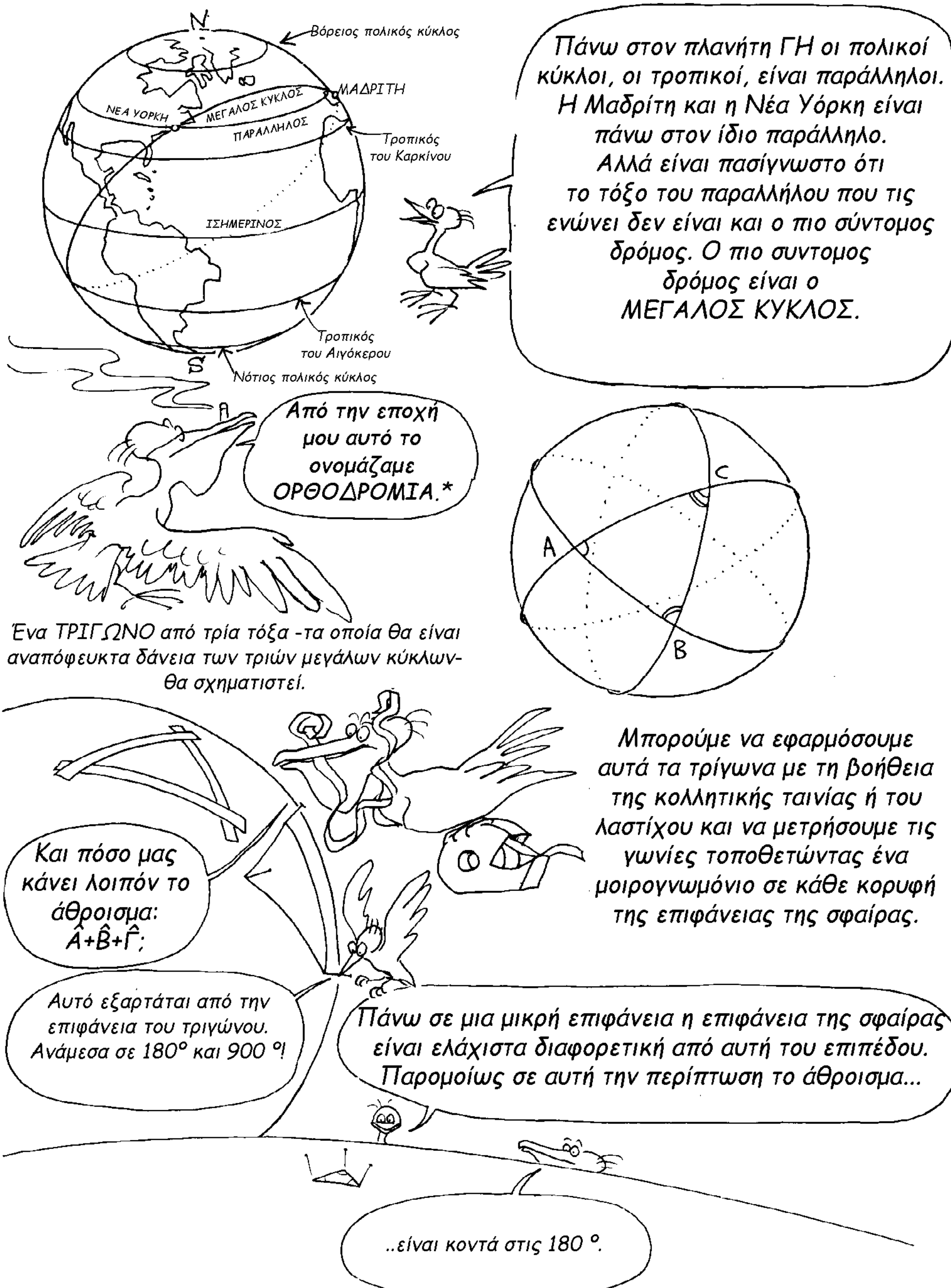
ΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ;

Για να το μάθουμε, πρέπει να διαλύσουμε τα νέφη:

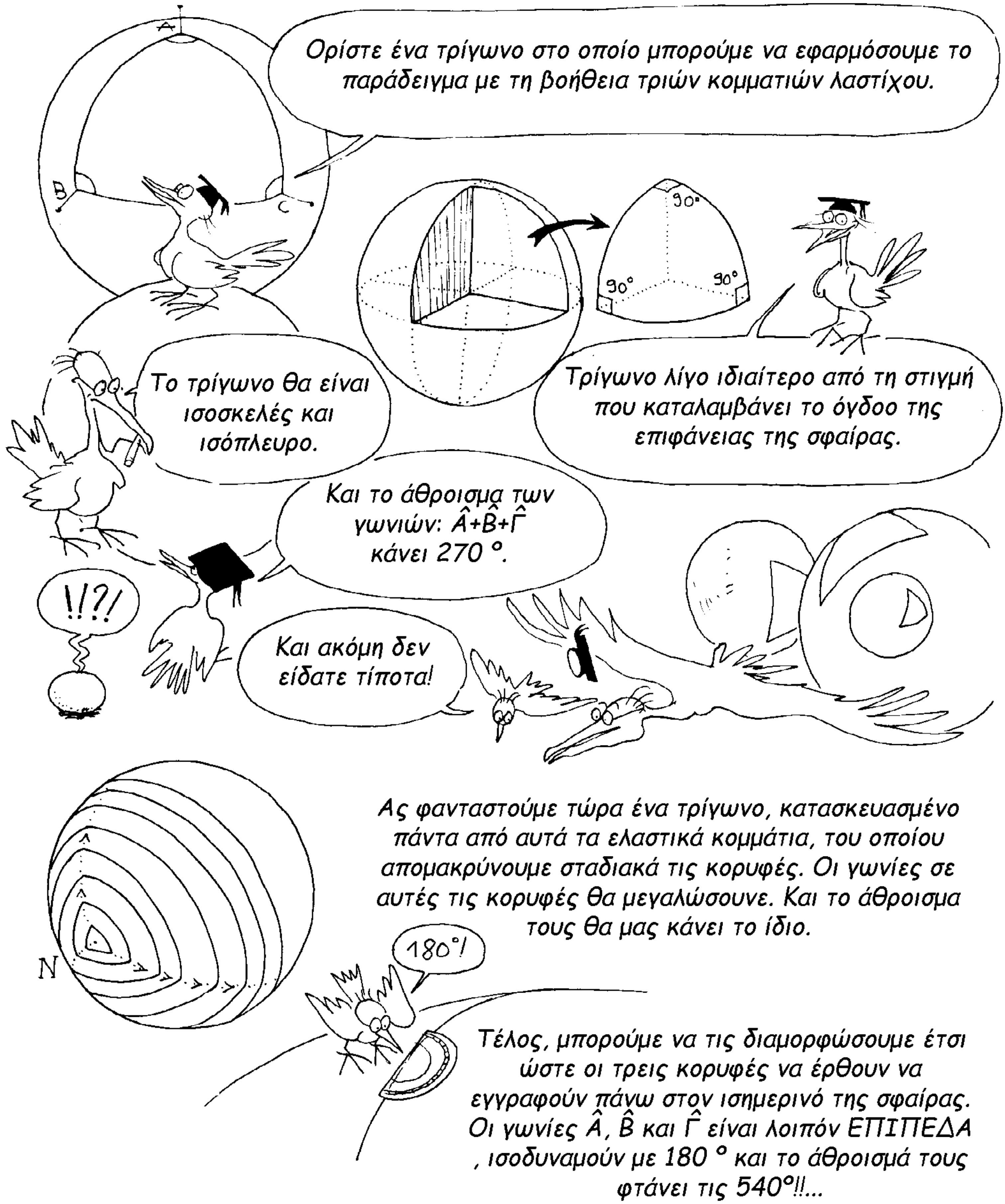
Ο Ζαχαρίας σύντομα κατάλαβε ότι βρίσκεται σε μία σφαίρα
πάνω στην οποία εφάρμοσε τους
κανόνες της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.


Αλλά πώς ο Ζαχαρίας κατάφερε να σχεδιάσει ΕΥΘΕΙΕΣ πάνω σε μια σφαίρα; Δε βγαίνει νόημα!
Πρέπει να 'ναι παγίδα!
Αγαπητέ μου, τι ονομάζεται ευθεία; Αν είναι το πιο σύντομο μονοπάτι από ένα σημείο σε ένα άλλο, τότε υπάρχουν ΕΥΘΕΙΕΣ πάνω σε μια σφαίρα.
Η έννοια του γεωδαιτικού (γραμμή του πιο σύντομου δρόμου) δεν είναι αποκλειστικό δικαίωμα του ΕΠΙΠΕΔΟΥ.
ΕΠΙΠΕΔΟ
Τεντώστε ένα λάστιχο ανάμεσα σε δύο σημεία μιας σφαίρας.
Αφήστε το!
Ζβίιιιιγκ
Πετυχαίνετε ένα ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ!

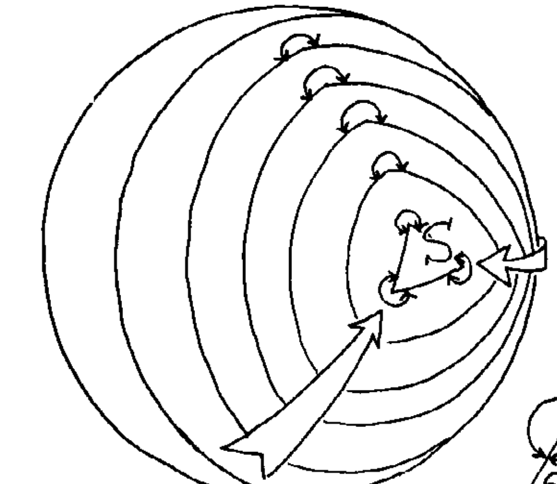

Τι είναι αυτά που μου λέτε;
Δεν είναι ΕΥΘΕΙΑ αυτό εδώ το πράγμα!
Πάρτε τότε αυτόν το χάρακα και επιβεβαιώστε το και 'σεις ο ίδιος!
Αυτό εδώ εσείς το λέτε χάρακα;!
Είναι ένας ΧΑΡΑΚΑΣ για τις ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ. Πάνω στο ΕΠΙΠΕΔΟ δουλεύει πολύ καλά. Κοιτάξτε: επιτρέπει να μην ξεφύγεις ούτε αριστερά, ούτε δεξιά.
ΕΠΙΠΕΔΟ
Παράξενος χάρακας τελικά...
Ωραία, όταν ο Ζαχαρίας σχεδιάζει το γεωδαιτικό του πάντα αυτό ΞΑΝΑΚΛΕΙΝΕΙ . Άρα, πάνω σε μια σφαίρα, τα γεωδαιτικά δεν είναι παρά κύκλοι;
Πάνω σε μια σφαίρα, όλες οι γραμμές, οι οποίες αποτελούν τον πιο σύντομο δρόμο, είναι τμήματα κλειστών γεωδαιτικών καμπύλων, οι οποίες είναι κύκλοι σχεδιασμένοι πάνω σε μια σφαίρα.

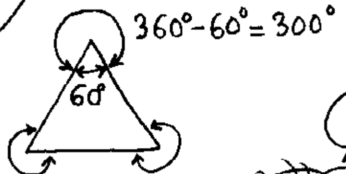


Σ.τ.Μ. Ορθοδρομία: ο συντομότερος πλους που γίνεται πάνω σε τόξο του μέγιστου κύκλου της γης.

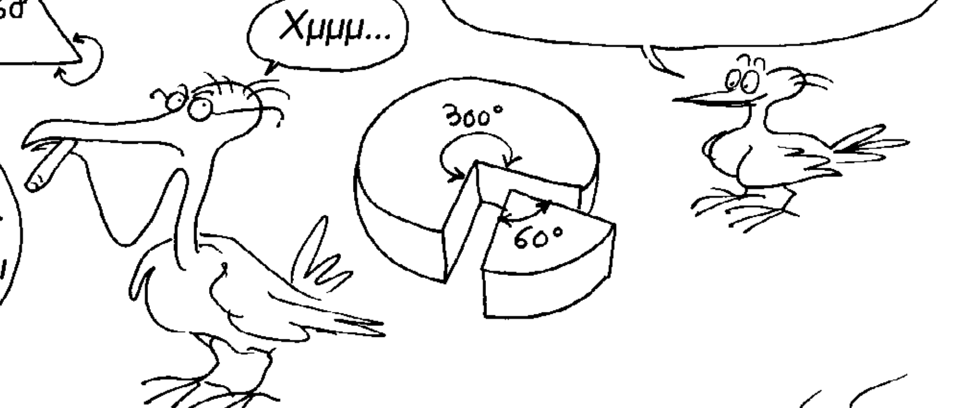

A
B
C
Ορίστε ένα τρίγωνο στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε το παράδειγμα με τη βοήθεια τριών κομματιών λαστίχου.
90°
90°
90°
Το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές και ισόπλευρο.
Τρίγωνο λίγο ιδιαίτερο από τη στιγμή που καταλαμβάνει το όγδοο της επιφάνειας της σφαίρας.
Και το άθροισμα των γωνιών: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}$ κάνει 270 °.
!!?!
Και ακόμη δεν είδατε τίποτα!
Ας φανταστούμε τώρα ένα τρίγωνο, κατασκευασμένο πάντα από αυτά τα ελαστικά κομμάτια, του οποίου απομακρύνουμε σταδιακά τις κορυφές. Οι γωνίες σε αυτές τις κορυφές θα μεγαλώσουνε. Και το άθροισμα τους θα μας κάνει το ίδιο.
N
180°!
Τέλος, μπορούμε να τις διαμορφώσουμε έτσι ώστε οι τρεις κορυφές να έρθουν να εγγραφούν πάνω στον ισημερινό της σφαίρας. Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι λοιπόν ΕΠΙΠΕΔΑ , ισοδυναμούν με 180 ° και το άθροισμά τους φτάνει τις 540°!!...

Επεκτείνοντας αυτή τη "μετανάστευση" των κορυφών του τριγώνου στο άλλο ημισφαίριο, αυτό θα συγκλίνει προς το σημείο S, τον αντίποδα του N. Αν διατηρήσουμε το σημείο εκκίνησης από τις κορυφές των γωνιών, καθεμία από αυτές θα ισοδυναμεί με περισσότερο από 180 °! Για να είμαστε πιο ακριβείς, καθεμία θα ισοδυναμεί με 360°-60°=300°.





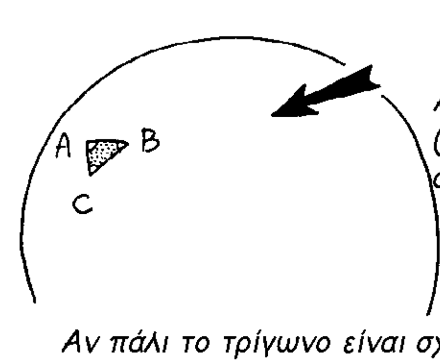
άθροισμα: $300 \times 3 = 900°$



Ακολουθώντας το θεώρημα του Γκάους, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου σχεδιασμένο πάνω σε μία σφαίρα ισοδυναμεί με:

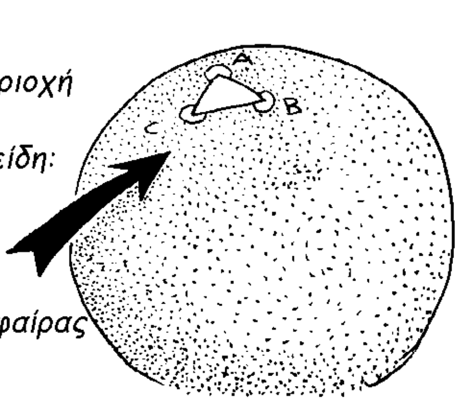
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}1416\,R^2}\right) \text{βαθμούς}$$

όπου R είναι η ακτίνα της προαναφερθείσας σφαίρας και A η κορυφή του τριγώνου.

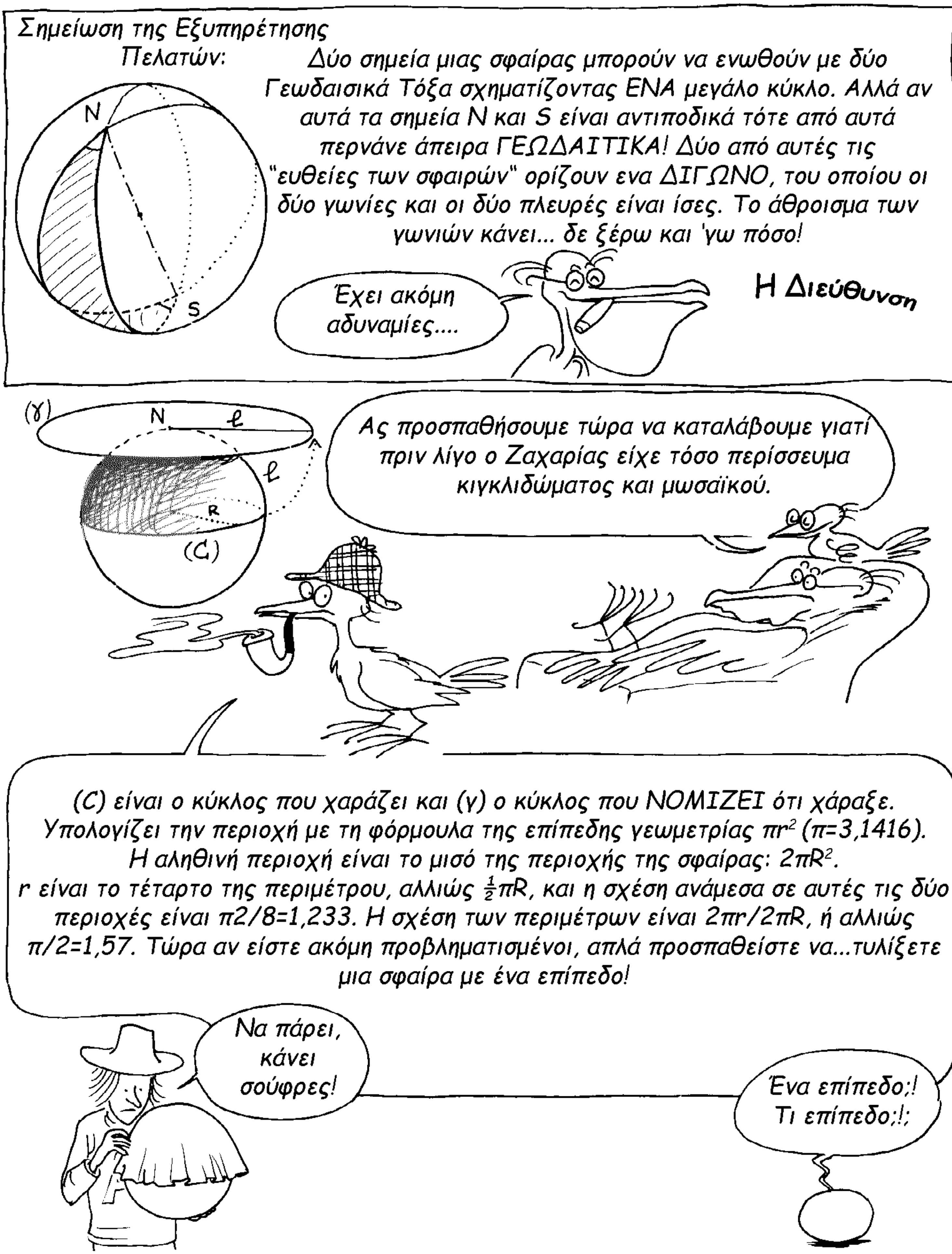


Αν το τρίγωνο καλύπτει μικρή περιοχή (σε σχέση με την υπόλοιπη σφαίρα) ξαναβρίσκουμε τον Ευκλείδη:

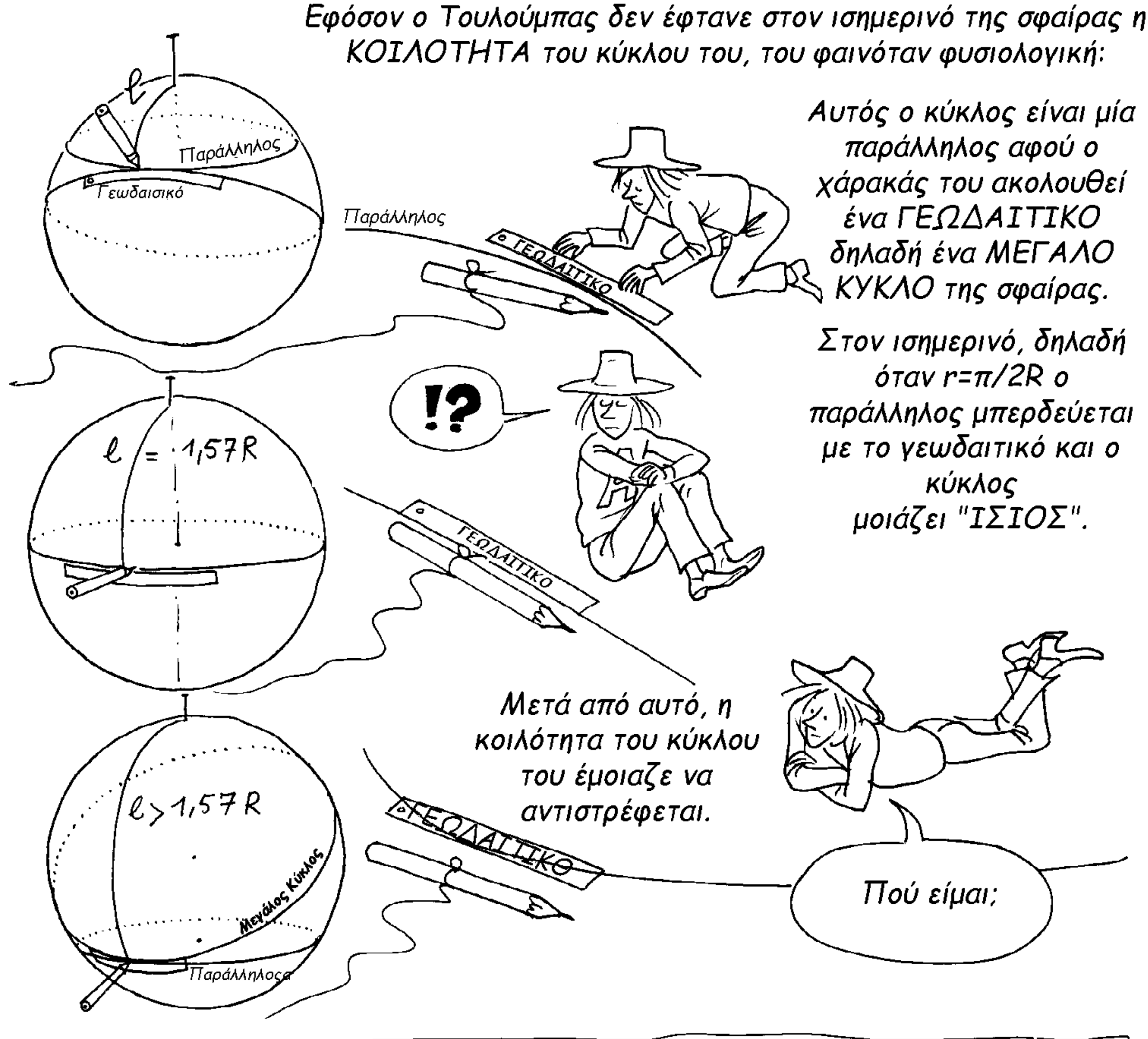
$$\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°\right)$$



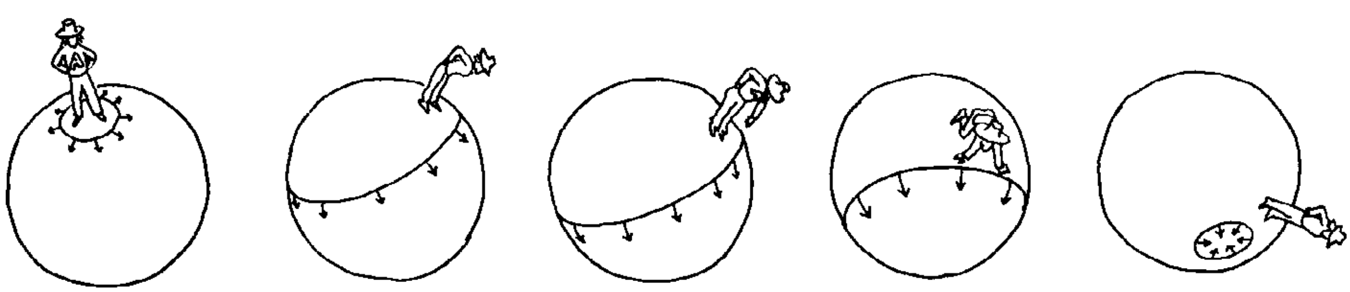
Αν πάλι το τρίγωνο είναι σχεδόν ίσο με την επιφάνεια της σφαίρας ($4 \times 3{,}1416 \times R^2$) ξαναβρισκόμαστε στις 900 °.



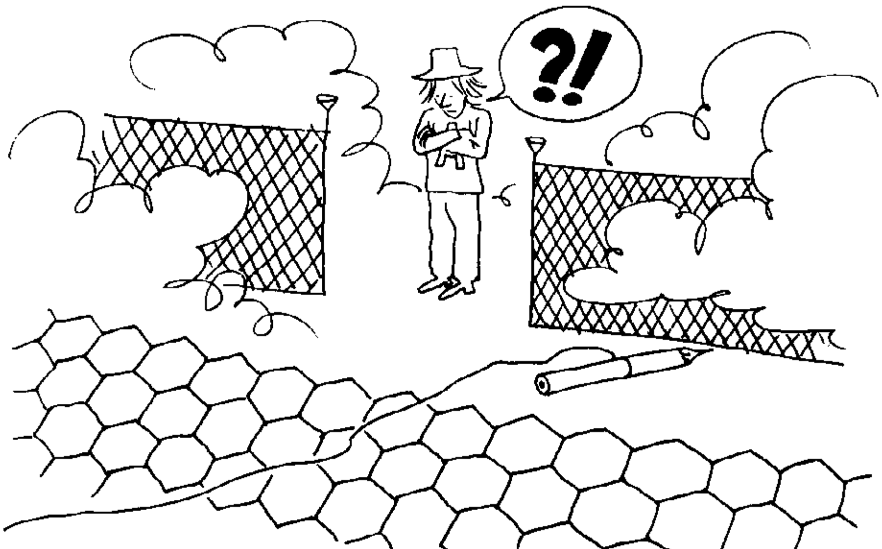
Σημείωση της Εξυπηρέτησης Πελατών:
Δύο σημεία μιας σφαίρας μπορούν να ενωθούν με δύο Γεωδαισικά Τόξα σχηματίζοντας ΕΝΑ μεγάλο κύκλο. Αλλά αν αυτά τα σημεία N και S είναι αντιποδικά τότε από αυτά περνάνε άπειρα ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ! Δύο από αυτές τις "ευθείες των σφαιρών" ορίζουν ενα ΔΙΓΩΝΟ, του οποίου οι δύο γωνίες και οι δύο πλευρές είναι ίσες. Το άθροισμα των γωνιών κάνει... δε ξέρω και 'γω πόσο!
N
S
Έχει ακόμη αδυναμίες....
Η Διεύθυνση
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Ας προσπαθήσουμε τώρα να καταλάβουμε γιατί πριν λίγο ο Ζαχαρίας είχε τόσο περίσσευμα κιγκλιδώματος και μωσαϊκού.
(C) είναι ο κύκλος που χαράζει και (γ) ο κύκλος που ΝΟΜΙΖΕΙ ότι χάραξε. Υπολογίζει την περιοχή με τη φόρμουλα της επίπεδης γεωμετρίας πr^2 (π=3,1416). Η αληθινή περιοχή είναι το μισό της περιοχής της σφαίρας: $2\pi R^2$. r είναι το τέταρτο της περιμέτρου, αλλιώς $\frac{1}{2}\pi R$, και η σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο περιοχές είναι π2/8=1,233. Η σχέση των περιμέτρων είναι 2πr/2πR, ή αλλιώς π/2=1,57. Τώρα αν είστε ακόμη προβληματισμένοι, απλά προσπαθείστε να...τυλίξετε μια σφαίρα με ένα επίπεδο!
Να πάρει, κάνει σούφρες!
Ένα επίπεδο;! Τι επίπεδο;!;



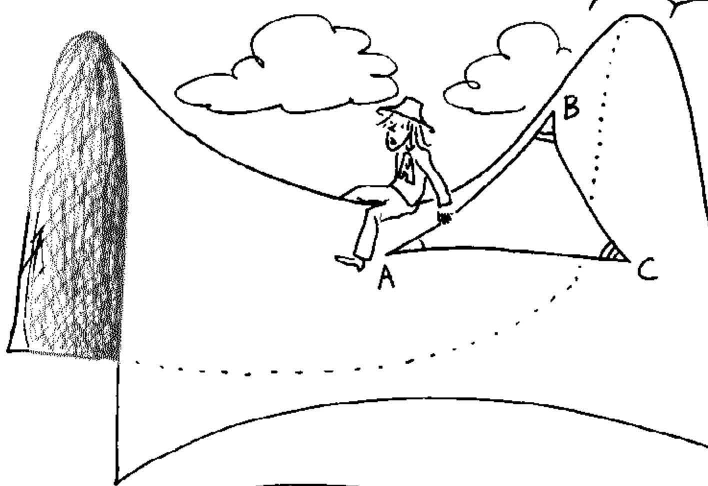
Αυτή η ιδιότητα εξηγεί πώς μπορούμε κατά βούληση «να μπούμε» ή «να βγούμε» από έναν κύκλο χωρίς να τον διασχίσουμε, όταν αυτός είναι σχεδιασμένος πάνω σε μία σφαίρα. Πρέπει να φανταστούμε αυτό τον κύκλο σαν ένα ελαστικό δαχτυλίδι το οποίο θα κάνουμε να γλιστρά πάνω σε μία μπάλα μπιλιάρδου.



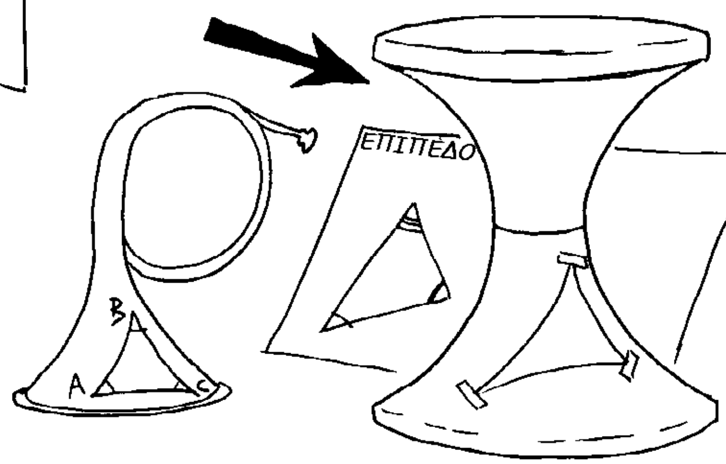

σφαιρική γεωμετρία
GAUSS
Ο Ζαχαρίας αφού χρειάστηκε κάποιο σχετικό χρόνο για να χωνέψει όλες αυτές τις θεωρίες που ανακάλυψε ο μαθηματικός Γκάους (1777-1855) αποφάσισε να ξεκινήσει για την εξερεύνηση του κόσμου των ΕΠΙΠΕΔΩΝ:
Ωραία, έχω όλα όσα μου χρειάζονται: ένα χάρακα, ένα μοιρογνωμόνιο, σπάγγο και το σφυρί μου. Πάμε λοιπόν!
Εμένα μου λες!
Μερικές φορές η επιστήμη σε ωθεί να πάρεις ρίσκα!
Έχοντας προσγειωθεί σε ένα νέο κόσμο, ο Ζαχαρίας απλώνει από την αρχή ένα ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ αλλά αυτή τη φορά:
Να πάρει, αυτό το επίπεδο μοιάζει να μην οδηγεί πουθενα!
Το γεωδαιτικό δεν ξανακλείνει.
Ωραία, ας κάνουμε κάτι άλλο.
Με τη βοήθεια τριών νημάτων καλά τεντωμένων, ο Ζαχαρίας κατασκεύασε ένα τρίγωνο αλλά το άθροισμα των γωνιών των κορυφών του, αυτή τη φορά εμφανίστηκε μικρότερο από 180°.



Ένας κύκλος όντας πάντα ένα σύνολο σημείων τοποθετημένων σε μία ίδια απόσταση r από ένα σταθερό σημείο, κάνει τον Τουλούμπα να διαπιστώσει ότι αυτός ο κύκλος σχεδιασμένος σε μια νέα επιφάνεια έχει περίμετρο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ από $2\pi r$ δεδομένου ότι η περιοχή του ΥΠΕΡΒΑΙΝΕΙ το πr^2. Για να διαλύσουμε τα νέφη:



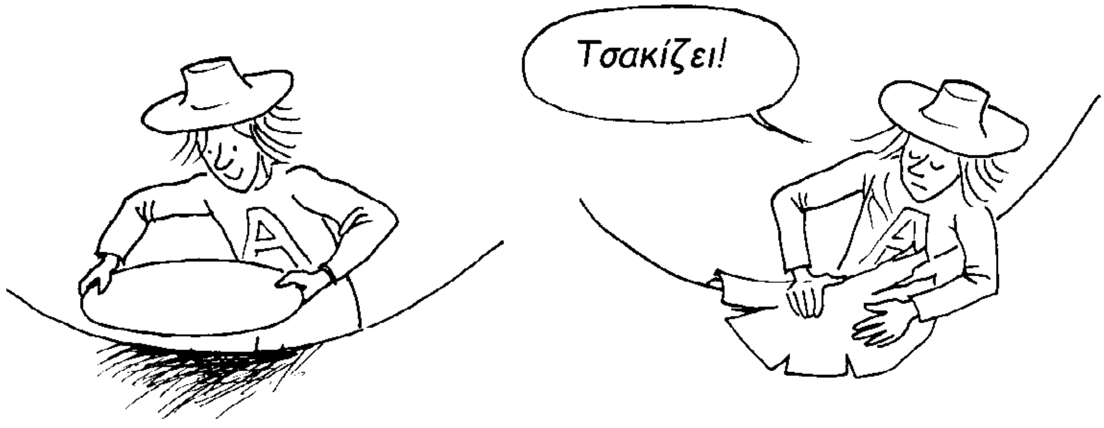
Αυτή τη φορά η επιφάνεια συγκρίνεται με το λαιμό ενός βουνού ή με τη σέλα ενός αλόγου. Ορισμένα αντικείμενα της καθημερινής σας ζωής μπορούν να ταιριάξουν εξίσου: ένα κυνηγετικό κέρατο ή ο παρακάτω τύπος σκαμνιού:



ΚΑΜΠΥΛΗ:

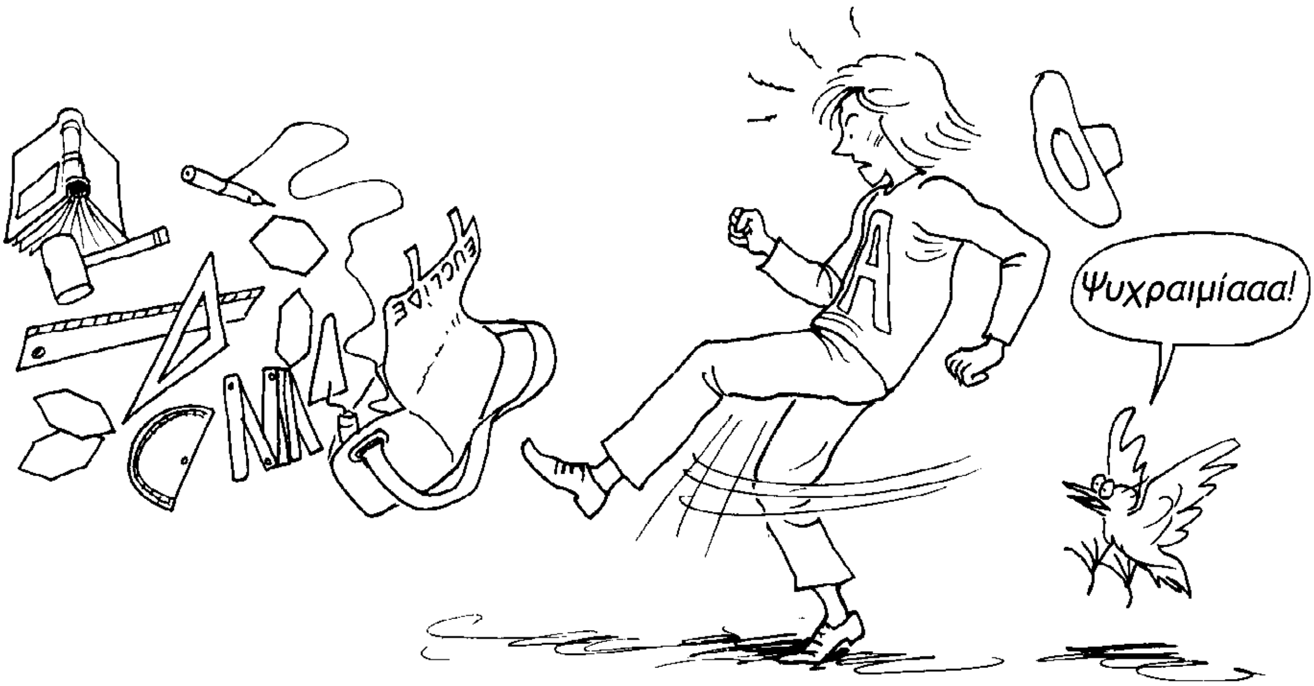
Μια κυρτή επιφάνεια είναι μία επιφάνεια πάνω στην οποία δεν ισχύουν τα ευκλείδια θεωρήματα. Η καμπύλη μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Πάνω σε μια επιφάνεια με ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ, το σύνολο των γωνιών του τριγώνου είναι ανώτερο των 180°. Αν σχεδιάσουμε έναν κύκλο ακτίνας r, η επιφάνειά του είναι μικρότερη του πr^2 και η περίμετρος του μικρότερη του $2\pi r$.
Πάνω σε μια επιφάνεια με ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι μικρότερο των 180°. Αν σχεδιάσουμε έναν κύκλο με ακτίνα r, η επιφάνειά του είναι ανώτερη του πr^2 και η περίμετρος του ανώτερη του $2\pi r$.

Αυτοστιγμεί ο Ζαχαρίας είχε διαπιστώσει ότι επιχειρώντας να ΚΑΛΥΨΕΙ μια σφαίρα, επιφάνεια με θετική καμπύλη, με ένα επίπεδο υλικό, οι σούφρες εμφανίζονται. Η επικάλυψη μιας επιφάνειας με αρνητική καμπύλη με ένα επίπεδο είναι εξίσου αδύνατη: εμφανίζονται τσακίσεις. Αυτό το τεστ περιτυλίγματος είναι το πιο απλό για να καθορίσουμε αν μια καμπύλη είναι θετική ή αρνητική.



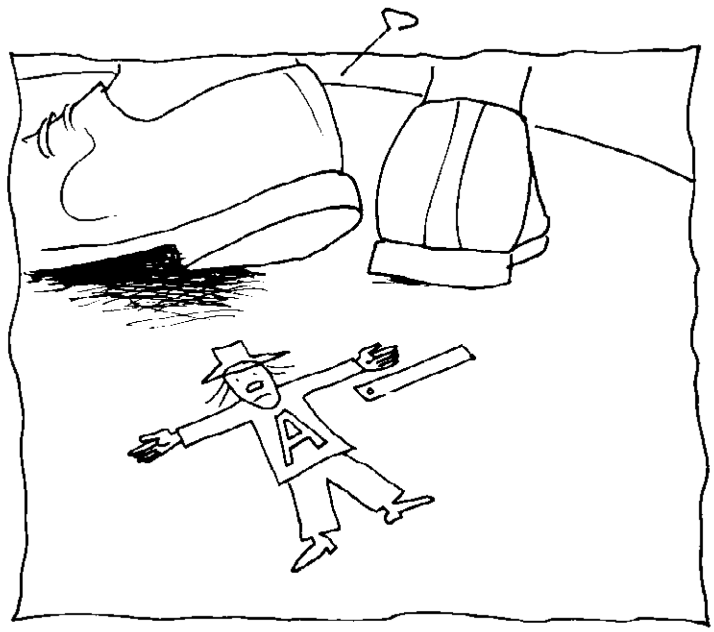
Όπως μπορούμε να δούμε και στην προηγούμενη σελίδα, οι επιφάνειες μπορούν να παρουσιάζουν περιοχές θετικής καμπύλης και άλλες αρνητικής.


τεστ περιτυλίγματος
Ένας κύλινδρος ή ένας κώνος αφήνονται να καλυφτούν από ένα επίπεδο.
Δε θα πανικοβληθούμε. Κολλάω τρία ελαστικά νήματα, δηλαδή τρία γεωδαιτικά πάνω στον κύλινδρό μου με τη βοήθεια της κολλητικής ταινίας...
B
A
C
...τώρα σχεδιάζω τα γεωδαισικά μου ΠΑΝΩ στην επιφάνεια...
Ακουμπώ των κύλινδρό μου εντελώς ΕΠΙΠΕΔΑ.
!...
B
A
C
Σύμφωνα με τον ορισμό μας, οι κύλινδροι και οι κώνοι, υπακούοντας στην ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ γεωμετρία, είναι ΙΣΟΠΕΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ!!!

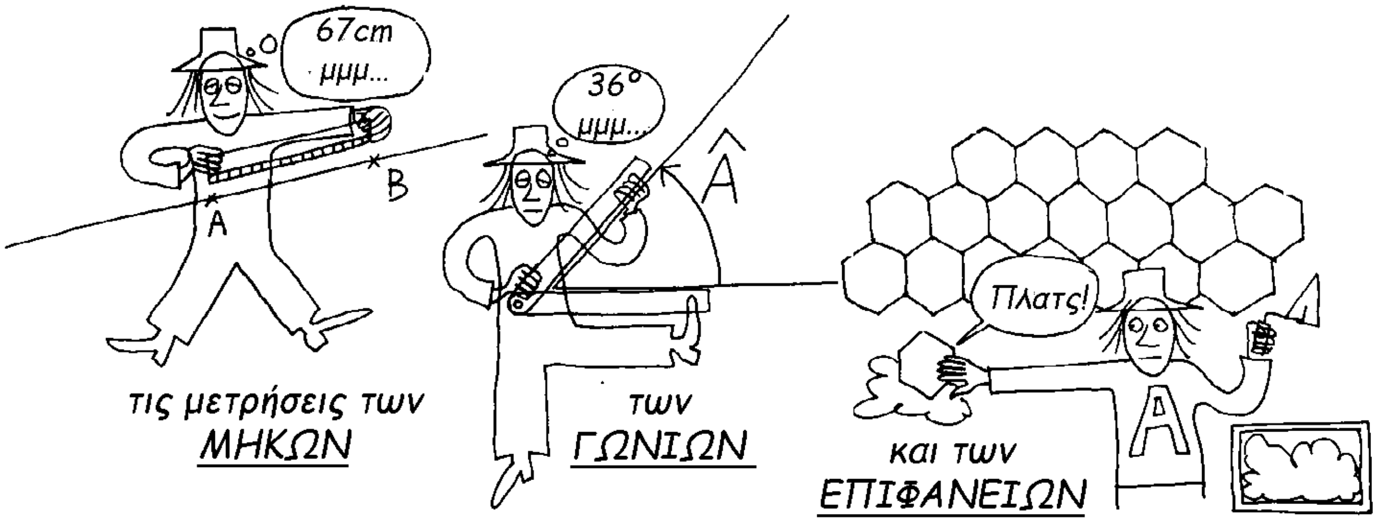


Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ:

Σύντομα, τα σύννεφα δεν άφηναν το Ζαχαρία να δει πέρα από τη μύτη του... Αν δεν ήταν έτσι θα είχε αντιληφθεί την καμπυλότητα του ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ του ΧΩΡΟΥ.
Υπάρχει και άλλος τρόπος να εμποδίσουμε το Ζαχαρία να ΔΕΙ αυτή την καμπύλη: είναι το να τον κάνουμε να κατοικήσει μέσα στην επιφάνεια, να τον κάνουμε κατά κάποιο τρόπο να ΑΝΗΚΕΙ σ' αυτήν.



Να σημειώσουμε ότι αυτή η νέα κατάσταση δεν εμποδίζει καθόλου



Παρόλο που ο Ζαχαρίας είχε εισχωρήσει ΜΕΣΑ στην επιφάνεια, είχε μπορέσει να καταλάβει πολύ καλά την καμπύλη, να την προσδιορίσει (θετική ή αρνητική), ακόμη και να τη μετρήσει χωρίς, παρόλ' αυτά, να είναι ικανός να τη ΔΕΙ. Αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου κάνει 180°, τότε αυτή η επιφάνεια είναι ΕΠΙΠΕΔΗ. Αν αυτό το άθροισμα ξεπερνά τις 180°, η καμπύλη είναι θετική και ο Ζαχαρίας μπορεί να υπολογίσει την ακτίνα της καμπύλης R με τη βοήθεια του τύπου:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}= 180(1+A/3,14R^2)$$

όπου A είναι η κορυφή του τριγώνου.

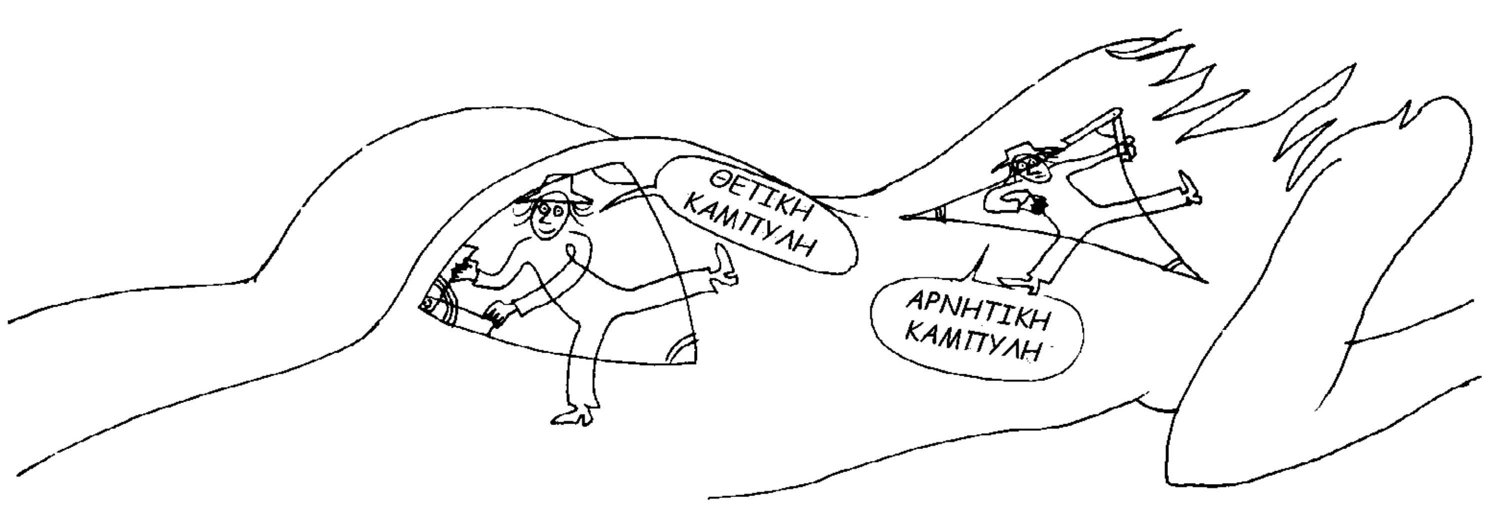
Αν αυτό το άθροισμα είναι κάτω από 180° μπορούμε να προσδιορίσουμε μια ακτίνα της καμπύλης R, που μας δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180\ (1-A/3,14R^2)$$

Αλλά δεν υπάρχει πλέον η συνηθισμένη φυσική έννοια.

Να σημειωθεί ότι ένα ΕΠΙΠΕΔΟ μπορεί να συγχωνευτεί με μία επιφάνεια αν έχει μια ακτίνα άπειρης καμπύλης R.

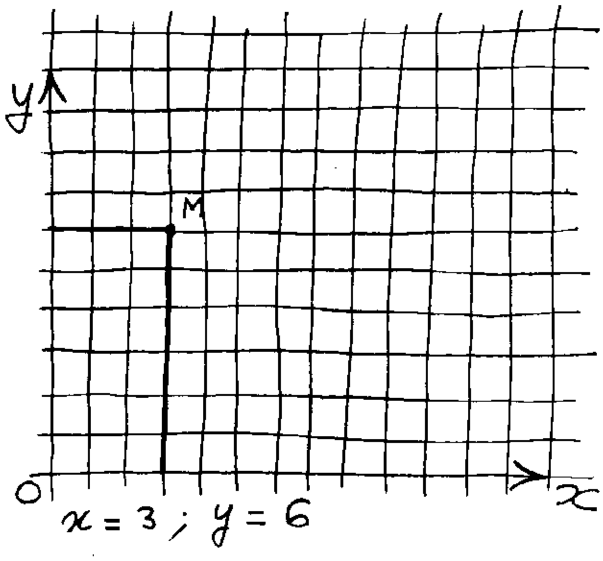
Ξαναβρίσκουμε λοιπόν όλα τα θεωρήματα του Ευκλείδη.

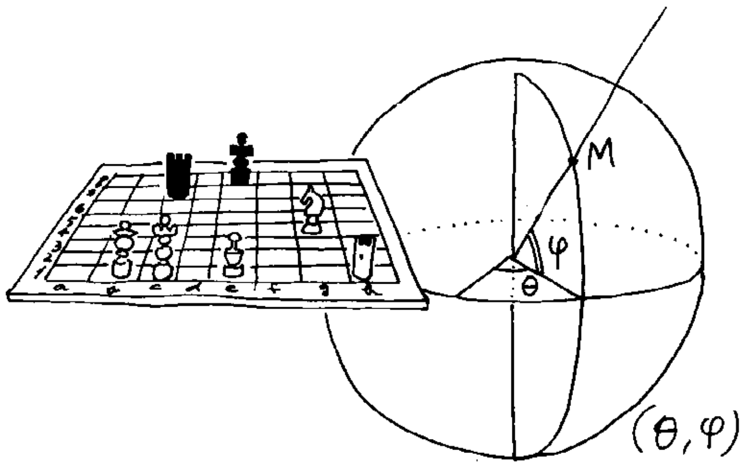


Η ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

Ο αριθμός των διαστάσεων είναι απλούστατα ο αριθμός των ποσοτήτων και των συντεταγμένων που πρέπει να εντοπίσουμε σε ένα οποιοδήποτε χώρο για να προσδιορίσουμε ένα ΣΗΜΕΙΟ.

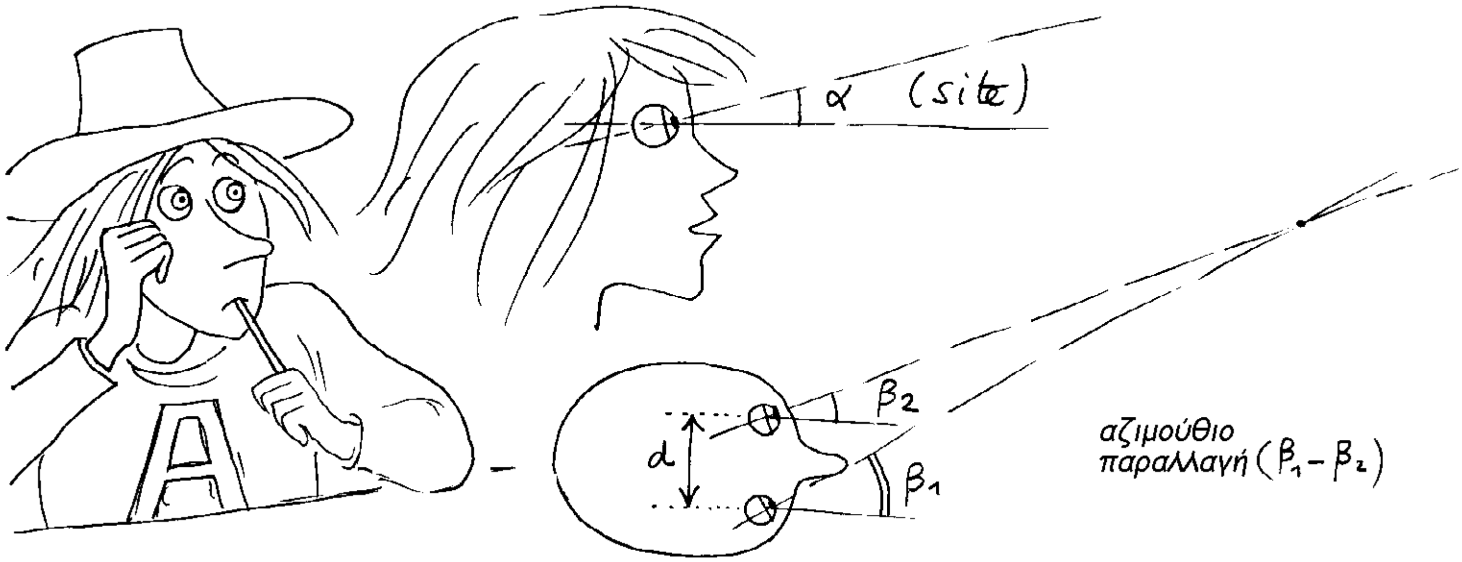
Οι ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ είναι αναπαραστάσεις χώρων σε δύο διαστάσεις. Οι ποσότητες που εξυπηρετούν την ευθυγράμμιση μπορεί να είναι τα μήκη, οι αριθμοί, οι γωνίες....





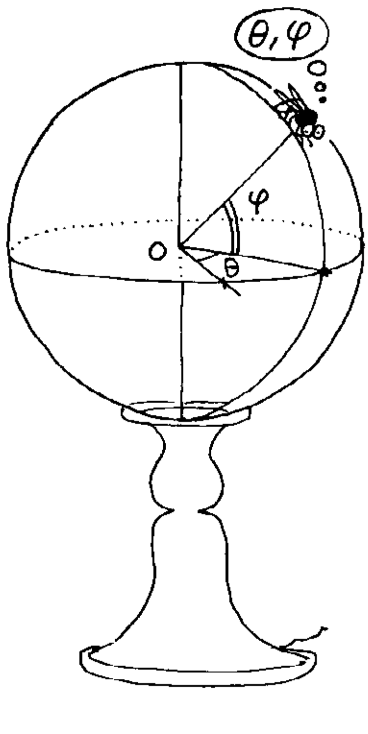
Γεωγραφικό μήκος, γεωγραφικό πλάτος

Συνηθίζουμε να λέμε ότι ο χώρος μας, αν εξαιρέσουμε το χρόνο, έχει τρεις διαστάσεις.



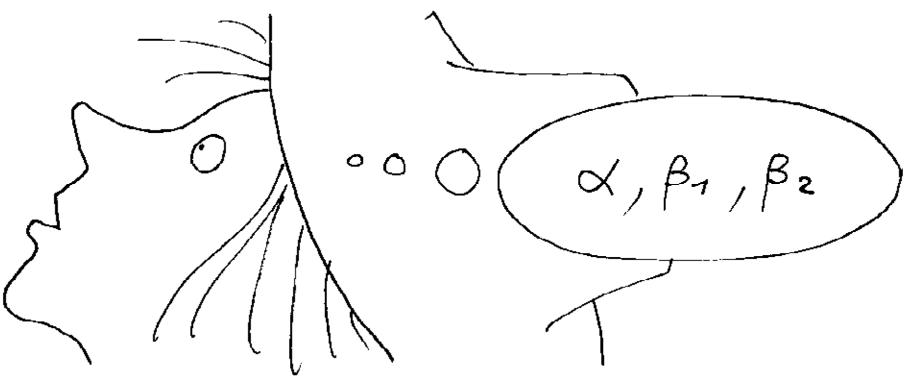
Ο Ζαχαρίας εντοπίζει τα αντικείμενα σε σχέση με το σώμα του, με την κρανιακή του κοιλότητα. Η θέση ενός σημειακού αντικειμένου λειτουργεί με τη βοήθεια των τριών ΓΩΝΙΩΝ: τοποθεσία και αζιμουθιακές ρυθμίσεις των δύο ματιών του: β1 και β2. Η γωνιακή διαφορά β1-β2 ονομάζεται παραλλαγή. Μέσα στο μυαλό του Ζαχαρία πραγματοποιείται μία αποκωδικοποίηση η οποία μεταλλάσσει αυτή την παραλλαγή σε απόσταση.

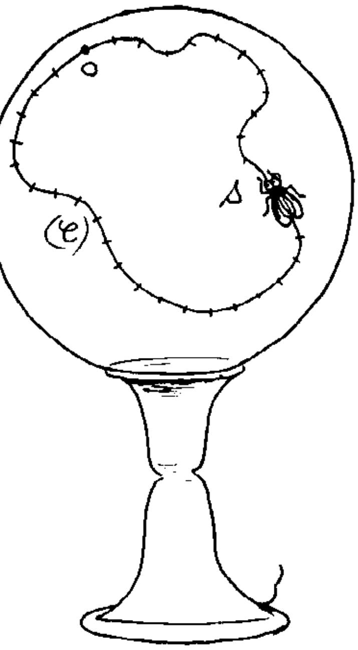
ΤΟ ΒΥΘΙΣΜΑ:



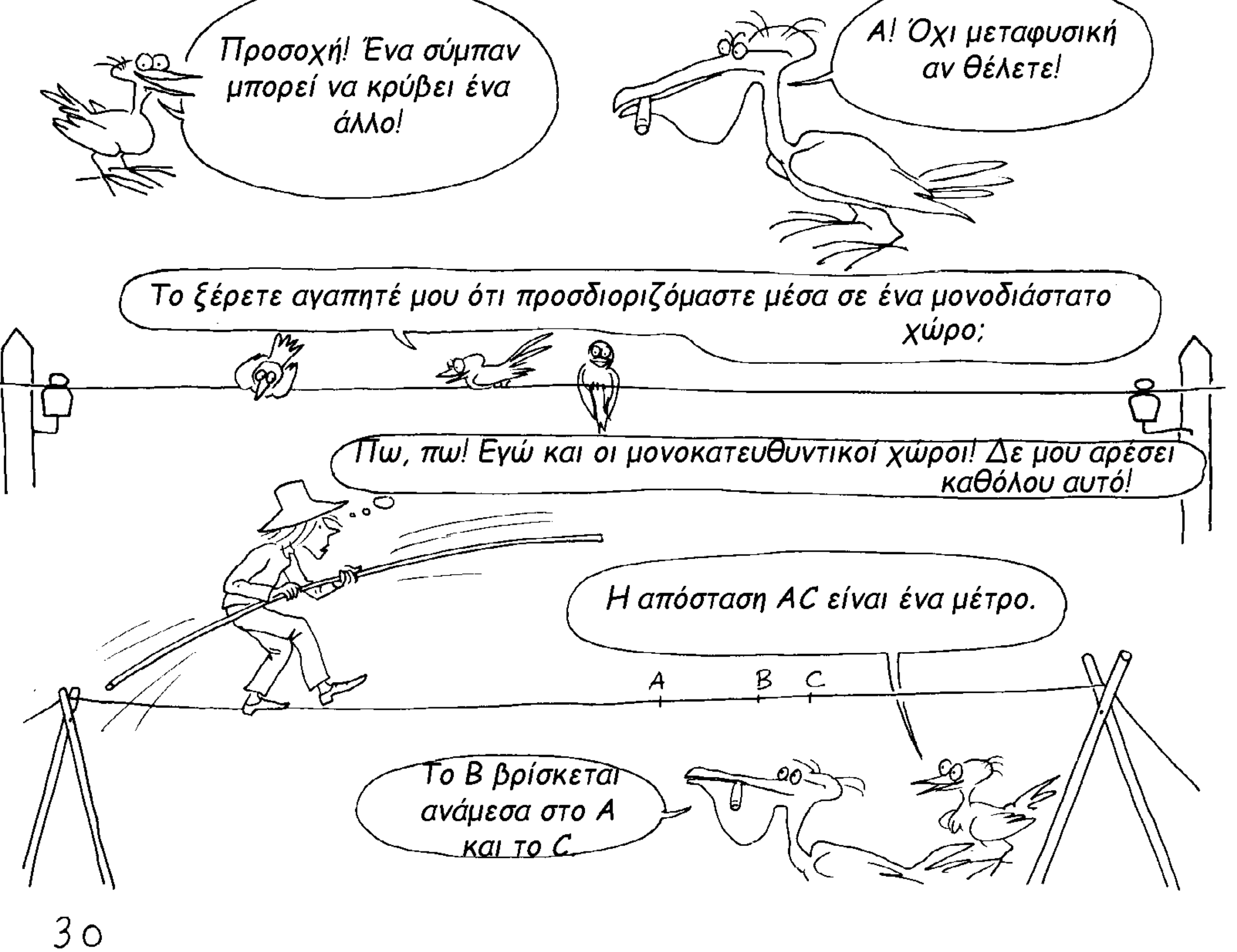
Όμως η μύγα εξελίσσεται με τον ίδιο τρόπο πάνω στο σφαιρικό γλόμπο της λάμπας και η θέση της μέσα σε αυτό το το δισδιάστατο χώρο, μπορεί να εντοπιστεί με τη βοήθεια δύο γωνιών θ και φ (μήκος και πλάτος).

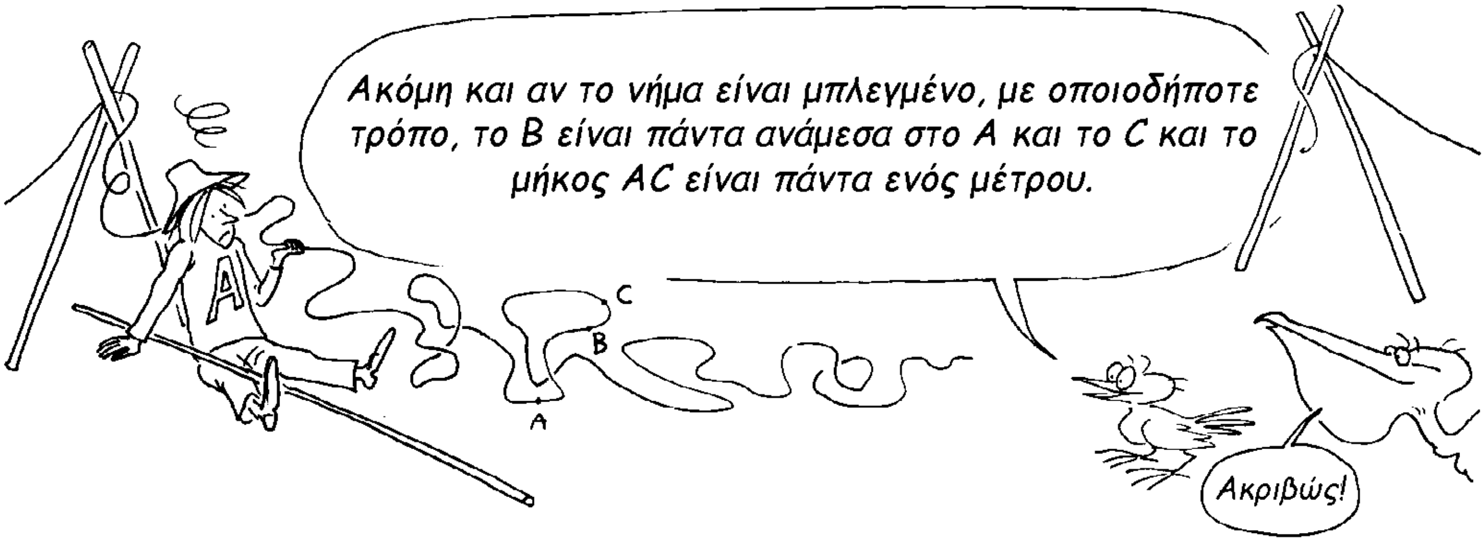
Θα λέγαμε ότι αυτός ο χώρος των δύο διαστάσεων είναι ΒΥΘΙΣΜΕΝΟΣ μέσα στο δικό μας χώρο των τριών διαστάσεων.



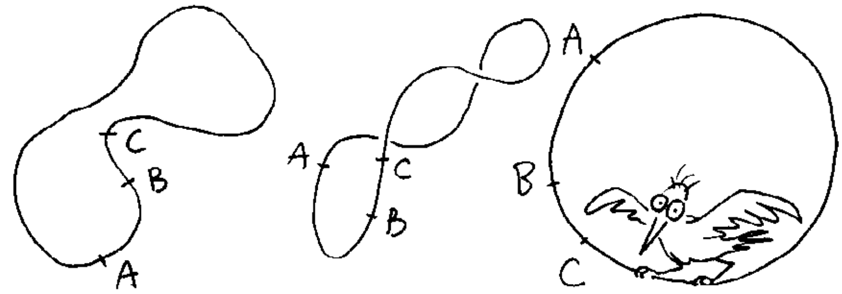


Υποθέτουμε ότι η μύγα ακολουθεί μια καμπύλη (r) σχεδιασμένη πάνω στη σφαίρα. Θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε τη θέση της με τη βοήθεια μίας και μόνο συντεταγμένης (η απόστασή της s σε ένα σημείο αναφοράς, υπολογισμένο αλγεβρικά)
Μία καμπύλη είναι μία εικόνα ενός χώρου σε ΜΙΑ διάσταση. Αυτός ο μονοδιάστατος χώρος είναι βυθισμένος μέσα σε ένα χώρο δισδιάστατο (σφαίρα), ο οποίος είναι με τη σειρά του βυθισμένος μέσα σε ένα χώρο τρισδιάστατο.
Έτσι ο χώρος όπου εξελισσόμαστε θα μπορούσε να είναι βυθισμένος μέσα σε ένα χώρο μιας υψηλότερης διάστασης χωρίς όμως εμείς να μπορουμε να τον συνειδητοποιήσουμε.





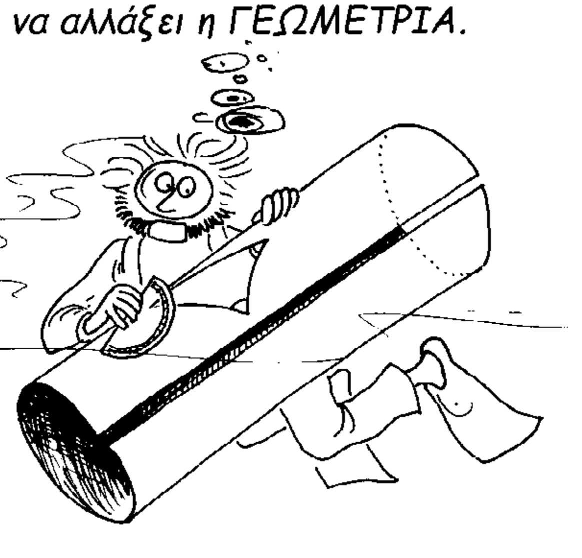
Αυτό υποδηλώνει ότι μερικές ιδιότητες μπορούν να είναι ανεξάρτητες του τρόπου που πραγματοποιείται το βύθισμα.



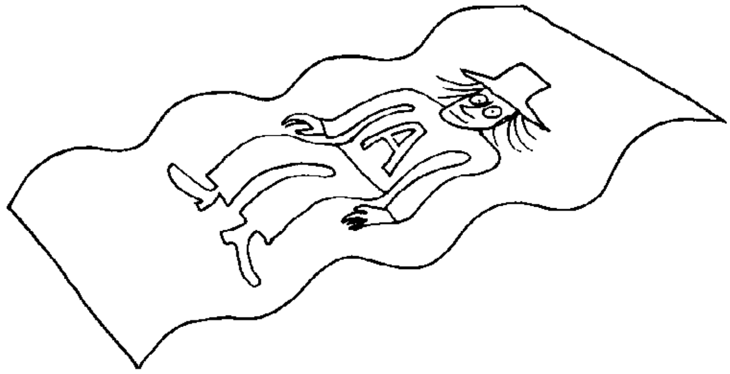
Ορίστε διαφορετικοί τρόποι για να βυθίσεις μια ΚΛΕΙΣΤΗ ΚΑΜΠΥΛΗ μέσα στο καθημερινό χώρο. Αυτό το ΚΛΕΙΣΙΜΟ είναι μια ανεξάρτητη ιδιότητα από το βύθισμα.

Αλλά πρέπει να είμαστε προσεχτικοί όταν τεντώνουμε ή όταν συστέλλουμε το νήμα για να μην αλλάξουμε τα μήκη ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία. Τώρα θα πάμε να βυθίσουμε ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ μέσα στο συνηθισμένο τρισδιάστατο χώρο.

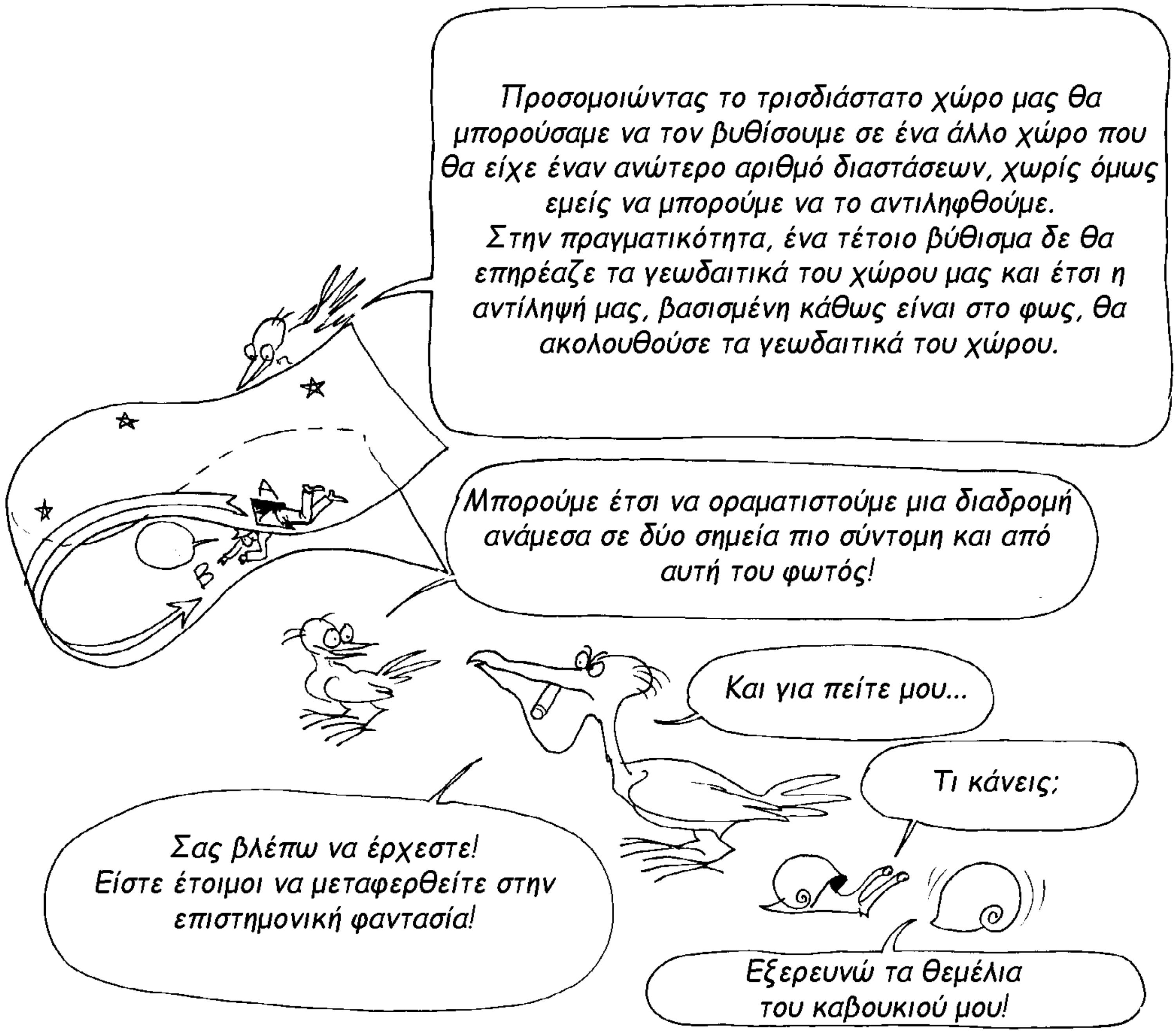
Αν ΒΥΘΙΣΟΥΜΕ ένα ΕΠΙΠΕΔΟ μέσα στον καθημερινό τρισδιάστατο χώρο, μπορούμε να το μετακινήσουμε, να το γυρίσουμε χωρίς να αλλάξει η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.



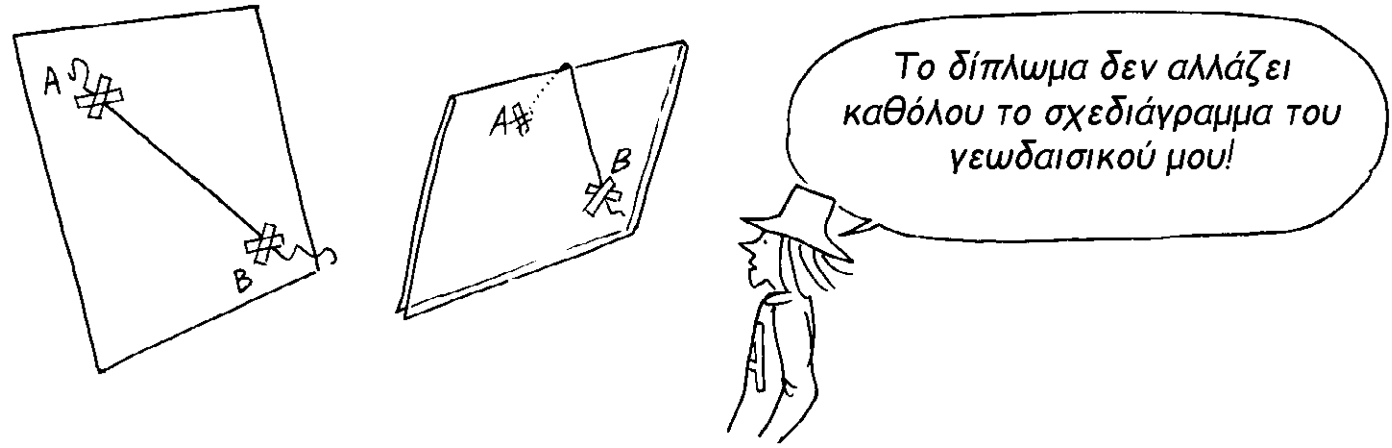
Είδαμε ότι το γεγονός της παραποίησης ενός επιπέδου με τη χρήση ενός κυλίνδρου δε θα άλλαζε ούτε τα γεωδαιτικά, ούτε τις γωνίες. Υπό αυτή την οπτική μία κυματιστή λαμαρίνα έχει πάντα μία γεωμετρία ΕΠΙΠΕΔΗ, ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ.



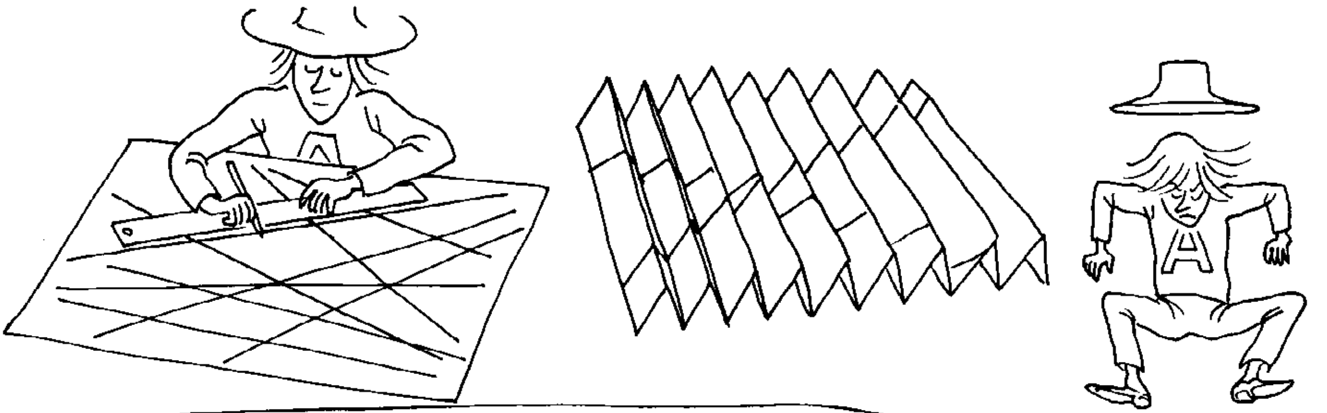
Ένας κάτοικος ενός τέτοιου δισδιάστατου χώρου, ευκλείδιου, δε θα είχε καμία συνείδηση μεταθέσεων, περιστροφών ή κλυδωνισμών, πράγματα τα οποία δε θα ήταν παρά διακυμάνσεις του τρόπου βυθίσματος μέσα σε ένα τρισδιάστατο χώρο.



Παίρνουμε ένα συστατικό επιπέδου και το διπλώνουμε:



Πάνω σε ένα φύλλο χαρτί σχεδιάστε στην τύχη, με τη βοήθεια ενός χάρακα, ευθείες, γεωδαιτικά και έπειτα τσαλακώστε το. Εξακολούθειτε να βλέπετε τα γεωδαιτικά στις επιφάνειες με ή χωρίς ζάρες.




Κύριε Τουλούμπα;
Σίγουρα!
Είμαι ο αντιπρόσωπος από το σπίτι Ευκλείδης και ΣΙΑ. Μάθαμε ότι έχετε χμ... εμ... κάποιες απογοητεύσεις από το υλικό μας.
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ & ΣΙΑ
Έχω εδώ νέα είδη που, αυτή τη φορά, θα σας ικανοποιήσουν πλήρως!
Δείξτε μου.
Το Μέλλον είναι στο τρισδιάστατο. Βλέπετε, η δισδιάστατη γεωμετρία είναι ολίγον τι...ε... ξεπερασμένη!
ΚΟΣΜΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ ΧΩΡΟΤΕΣΤ
Η νέα μας αναγκαιότητα στα γεωδαιτικά...
αποτελείται από άκαμπτες μπάρες οι οποίες ταιριάζουν τέλεια η μία στην άλλη.
Σας επιτρέπουν να μην πατε ούτε αριστερά, ούτε δεξιά, ούτε επάνω, ούτε κάτω αλλά ΟΛΟ ΕΥΘΕΙΑ!


Για το μέτρημα των επιφανειών πάρτε αυτή τη μπογιά. Ακριβώς εκατό γραμμάρια σε κάθε τετραγωνικό μέτρο.
Ευφυέστατο!
Για το μέτρημα του όγκου γεμίστε αυτό εδώ με αέριο. Θα διαβάσετε κατευθείαν την αξία πάνω στο μετρητή του ΧΩΡΟΤΕΣΤ.
Και να θυμάστε: επιφάνεια σφαίρας: $4\pi r^2$, όγκος: $4/3\pi r^3$.
Εννοείται!
EUCLIDE & Cie
Τι επάγγελμα και αυτό!
Ο Ζαχαρίας αυτή τη φορά, προσγειώθηκε σε ένα τρισδιάστατο χώρο και εμείς θα τον ακολουθήσουμε στην εξερεύνησή του.

Από καλό υλικό. Και αυτές οι βέργες είναι ακριβώς ένα μέτρο.
Αλλά αφού είχε τοποθετήσει μια σεβαστή ποσότητα από βέργες...
Αυτό ήταν! Ξαναρχίσαμε! Πάλι τα ίδια!
Το γεωδαιτικό μου ξανακλείνει στην ίδια του την άκρη.
Ένας τρισδιάστατος χώρος κλείνει;
Είναι το τέλος όλων!
Ο Ζαχαρίας ενώ καθόταν σε έναν αστεροειδή για να φάει αποφάσισε να ξαναγυρίσει στη μέθοδο του μετρήματος των γωνιών.
Όπως και την προηγούμενη φορά θα χρησιμοποιήσω τρία ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ για να φτιάξω ένα ΤΡΙΓΩΝΟ.
EUCLIDE ET Cie


?!?
Τα γεωδαιτικά μου είναι σωστά ταιριασμένα και ωστόσο το άθροισμα των τριών γωνιών είναι πάνω από 180°!!
Όμορφα
SPATIOTEST
Φσσσσσσσσσσς
Θα κατασκευάσω μία και θα μετρήσω τον όγκο της και την επιφάνειά της.
Μια σφαίρα με ακτίνα r είναι το σύνολο των σημείων τα οποία είναι τοποθετημένα σε μία απόσταση r από ένα σταθερό σημείο, που θα το ονομάσω N.
Η επιφάνεια είναι μικρότερη από $4\pi l^2$.
Ορίστε που ήδη ο όγκος είναι μικρότερος από $4/3\ \pi l^3$!
Θα ακολουθήσω τις οδηγίες για να το δω!

Ο Ζαχαρίας μεγαλώνει κι άλλο την ακτίνα r της σφαίρας.

Κι άλλο, κι άλλο...

Λίγο αργότερα:

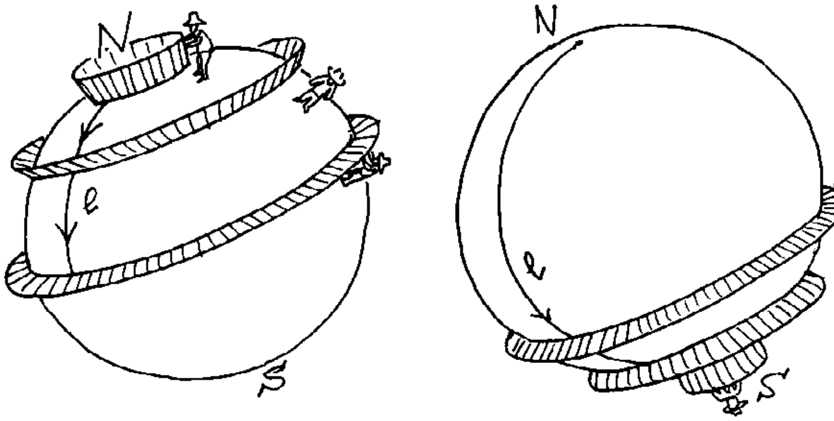
Έτσι λοιπόν, απλά διογκώνοντας ένα μπαλόνι σε ένα τρισδιάστατο χώρο, ο Ζαχαρίας κατέληξε να βρεθεί ΜΕΣΑ του!!

Αν δεν είχε σταματήσει έγκαιρα τη μπουκάλα θα είχε χαθεί συμπιεζόμενος, ακριβώς όπως είχε καταλήξει να βρεθεί φυλακισμένος στη σελίδα 13.

Ακόμη και με την καλύτερη διάθεση όλου του κόσμου δε μπορούμε να ΣΧΗΜΑΤΙΣΟΥΜΕ ΜΙΑ ΣΑΦΗ ΕΙΚΟΝΑ της ΚΑΜΠΥΛΗΣ σε αυτόν το τρισδιάστατο χώρο. Αυτά τα γεωδαιτικά ξανακλείνουν και η χωρητικότητά τους δεν αντιπροσωπεύει παρά ένα ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ νούμερο κυβικών μέτρων. Έτσι ακριβώς και η επιφάνεια του πλανήτη μας, επιφάνεια κλειστή, δεν προσφέρει παρά ένα ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ νούμερο τετραγωνικών μέτρων.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, αυτού του τρισδιάστατου χώρου είναι μεγαλύτερο των 180°. Για να «ΔΟΥΜΕ» την καμπύλη του θα έπρεπε να είμαστε τόσο ικανοί ώστε να αντιλαμβανόμαστε μέσα σε τέσσερις διαστάσεις.

Μπορούμε πάντα να πούμε ότι το τρισδιάστατο ΣΥΜΠΑΝ μας είναι ένα ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΟ, βυθισμένο μέσα σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων, ο οποίος χώρος με τη σειρά του μπορεί να είναι ένα υπερεπίπεδο βυθισμένο μέσα σε ένα χώρο πέντε διαστάσεων κ.ο.κ. Αλλά στις μέρες μας δεν είναι σώφρον να λέμε τέτοια πράγματα.

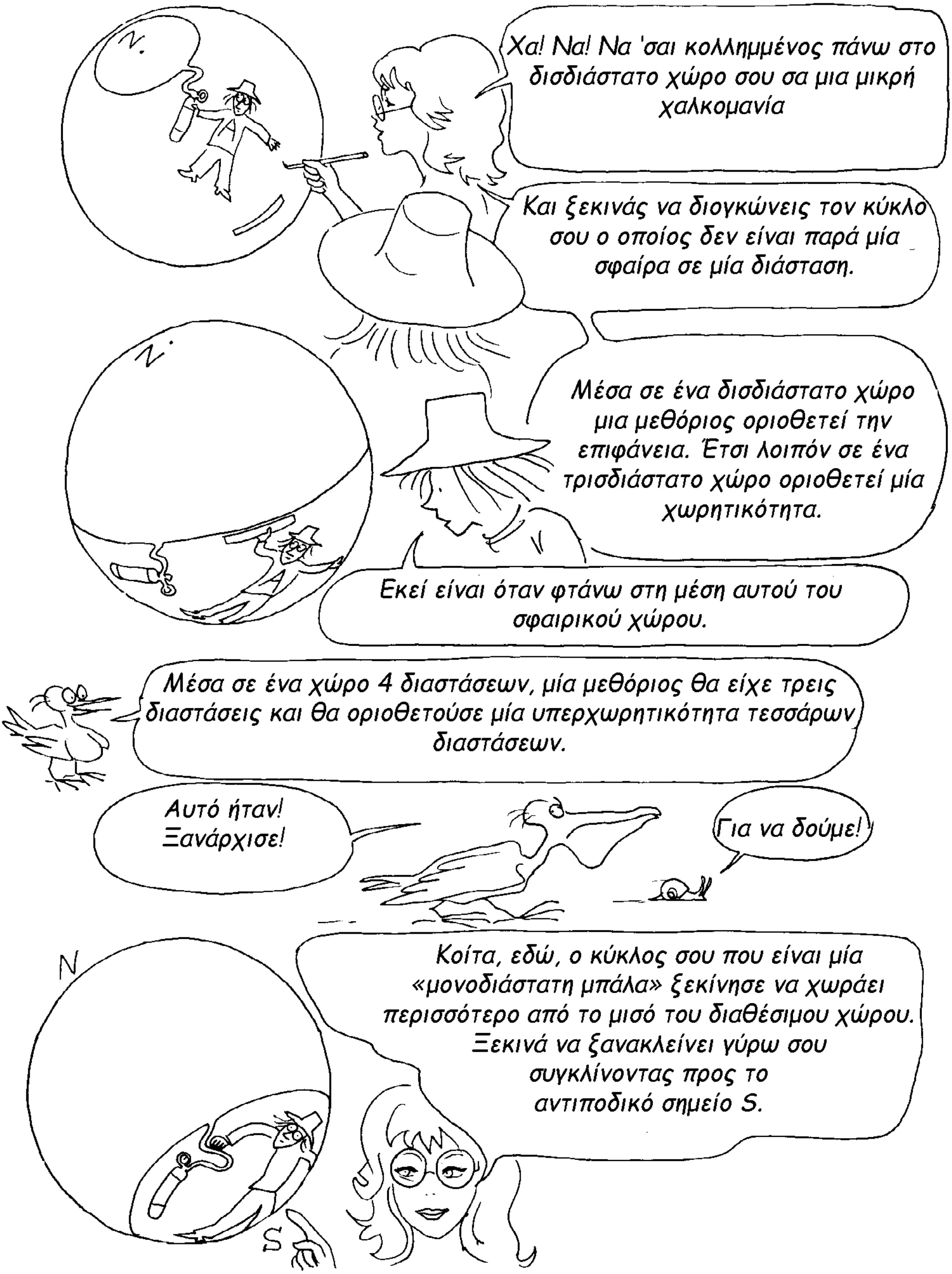


Πάνω στη σφαίρα μεγαλώνοντας την ακτίνα r ο Ζαχαρίας είχε καταλήξει να βρεθεί στους αντίποδες S του σημείου N, κέντρο του κύκλου του, ασφυκτιώντας από το ίδιο του κλείσιμο.
Μέσα στον τρισδιάστατο χώρο με θετική καμπύλη συμβαίνει το ίδιο πράγμα.

Μέσα σε αυτό το δισδιάστατο χώρο που είναι η σφαίρα ο Ζαχαρίας συνάντησε τον ΙΣΗΜΕΡΙΝΟ όταν είχε περικλείσει τη μισή διαθέσιμη επιφάνεια.
Ο ΙΣΗΜΕΡΙΝΟΣ του τρισδιάστατου χώρου υπάρχει επίσης ως ΥΠΕΡΣΦΑΙΡΙΚΟΣ. Ο Ζαχαρίας τον φτάνει εφόσον η μπάλα του καταλαμβάνει το μισό του διαθέσιμου όγκου. Πάνω στη σφαίρα, ο ισημερινός κύκλος του φαινόταν σαν μια ΕΥΘΕΙΑ. Με τον ίδιο τρόπο στον υπερσφαιρικό χώρο, η «μπάλα-ισημερινός» έχει για αυτόν την όψη ενός ΕΠΙΠΕΔΟΥ.
Με το πέρασμα στον ισημερινό η ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ της μπάλας αντιστρέφεται και πηγαίνει αυτόματα και εστιάζεται στο αντιποδικό σημείο S του σημείου N, κέντρο της μπάλας.

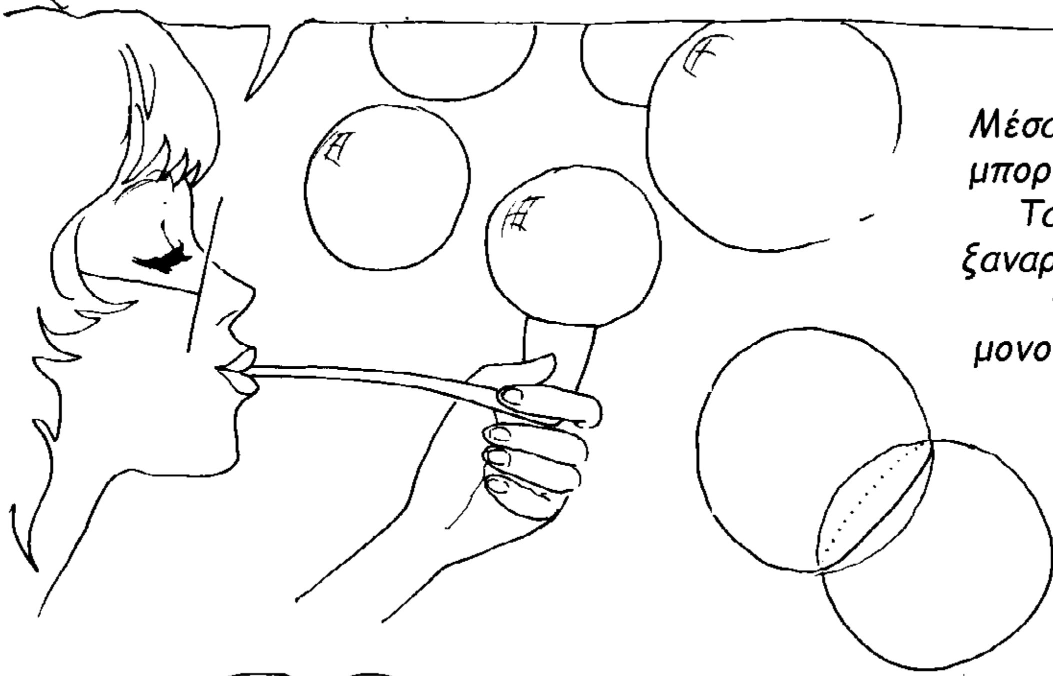

Μπελάδες;
Κάπως έτσι. Όλα έχουν λίγο ανακατευτεί στο κεφάλι μου.
Με λένε Σοφία. Οι καμπύλες όλων των ειδών είναι ο τομέας μου!
Η πλοήγηση μεσα στις υπερσφαίρες σαστίζει πάντα λιγάκι στην αρχή. Πρέπει να περιορίσουμε το μπλοκάρισμα. Θα το κάνουμε σιγά σιγά.
Μμμ..ναι...
Έχω λίγο χάσει το νόημα....


Μα το ΚΕΝΤΡΟ αυτής της υπερσφαίρας πού είναι;
Αν σχεδιάσω έναν κύκλο πάνω σε ένα επίπεδο αυτό είναι μία αναπαράσταση ενός μονοδιάστατου χώρου, κλειστού, βυθισμένου σε ένα δισδιάστατο χώρο: το ΕΠΙΠΕΔΟ. Συμφωνούμε;
Και το κέντρο του κύκλου ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ πάνω στον κύκλο.
Μμμμ...
Μια σφαίρα αναπαριστά ένα ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ κλειστό χώρο βυθισμένο σε έναν άλλο τριών διαστάσεων. Το κέντρο αυτής της σφαίρας επίσης ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ πάνω στη σφαίρα. Είναι μέσα στον τρισδιάστατο χώρο.
Το κέντρο ενός τρισδιάστατου υπερσφαιρικού χώρου θα μπορούσε να τοποθετηθεί μέσα σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων υποθέτοντας ότι αυτός είναι βυθισμένος και πάει λέγοντας... Έτσι το κέντρο ενός υπερσφαιρικού χώρου σε τέσσερις διαστάσεις θα ήταν μέσα σε ένα χώρο πέντε διαστάσεων κ.ο.κ.

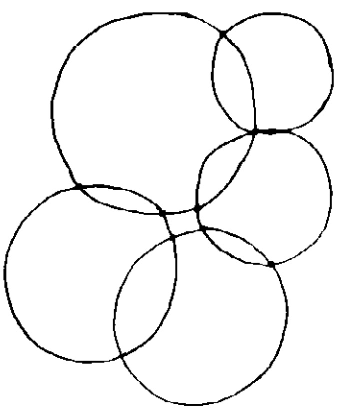

Χα! Να! Να 'σαι κολλημμένος πάνω στο δισδιάστατο χώρο σου σα μια μικρή χαλκομανία
Και ξεκινάς να διογκώνεις τον κύκλο σου ο οποίος δεν είναι παρά μία σφαίρα σε μία διάσταση.
Μέσα σε ένα δισδιάστατο χώρο μια μεθόριος οριοθετεί την επιφάνεια. Έτσι λοιπόν σε ένα τρισδιάστατο χώρο οριοθετεί μία χωρητικότητα.
Εκεί είναι όταν φτάνω στη μέση αυτού του σφαιρικού χώρου.
Μέσα σε ένα χώρο 4 διαστάσεων, μία μεθόριος θα είχε τρεις διαστάσεις και θα οριοθετούσε μία υπερχωρητικότητα τεσσάρων διαστάσεων.
Αυτό ήταν! Ξανάρχισε!
Για να δούμε!
N
Κοίτα, εδώ, ο κύκλος σου που είναι μία «μονοδιάστατη μπάλα» ξεκίνησε να χωράει περισσότερο από το μισό του διαθέσιμου χώρου. Ξεκινά να ξανακλείνει γύρω σου συγκλίνοντας προς το αντιποδικό σημείο S.
S


Με τον ίδιο τρόπο στον καμπυλωτό τρισδιάστατο χώρο όταν εκχέω περισσότερη από τη μισή χωρητικότητα η μπάλα κλείνει γύρω μου συγκλίνοντας προς το αντιποδικό σημείο.
Κατάλαβα!
Γιατί η σφαίρα μέσα σε αυτό το καμπυλωτό τρισδιάστατο χώρο έχει προφανώς δύο κέντρα τα οποία είναι αντιποδικά.
?!!?
Τελικά δεν ξέρω τι ακριβώς κατάλαβα αλλά έχω την εντύπωση ότι όλο και κάτι έχω καταλάβει.
Τι άγχος!
Μα όχι βρε Ζαχαρία! Όταν υπάρχουν περισσότερες από τρεις διαστάσεις ΚΑΤΑΛΑΒΕ ότι ΠΑΡΕΚΤΕΙΝΕΤΑΙ!
Παρεκτείνω χωρίς να το ξέρω!
Εσείς είστε που θα κάνετε το σχέδιο! Μέσα στο κεφάλι σας!

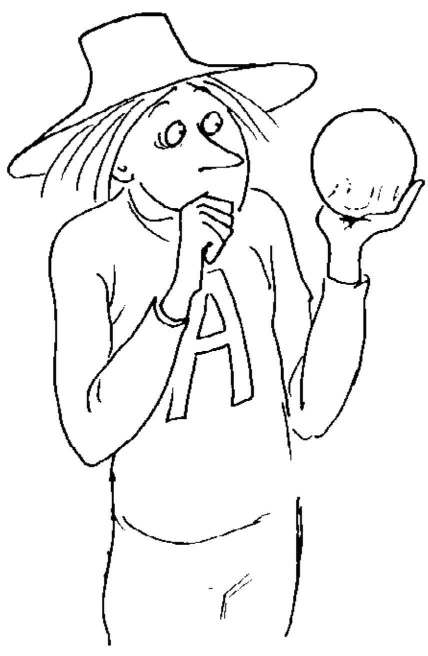
Τώρα παίρνω ένα τρισδιάστατο χώρο όπου τοποθετώ δισδιάστατες σφαίρες από στίβες μικρών δισδιάστατων συμπάντων.



Μέσα σε αυτά τα σύμπαντα μπορούμε να διεισδύσουμε. Τα κοινά τους σημεία ξαναρχίζουν ακολουθώντας τους κύκλους, σα μονοδιάστατα αντικείμενα.



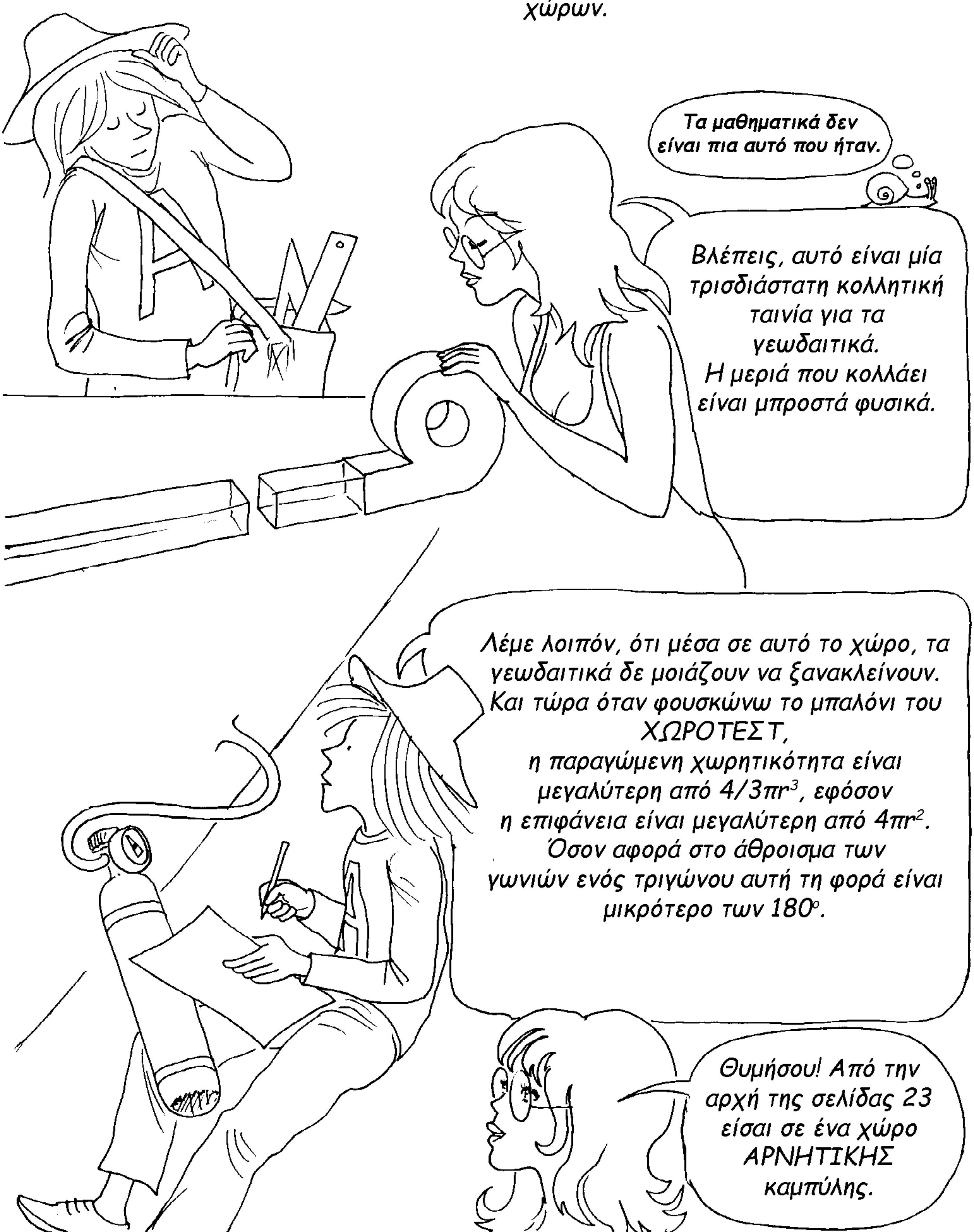
Με τον ίδιο τρόπο, οι κύκλοι, μονοδιάστατα αντικείμενα, τοποθετημένα πάνω σε μία κόλλα χαρτί (2 διαστάσεις) θα κοβόντουσαν ακολουθώντας τα ΣΗΜΕΙΑ. (Συνηθίζουμε να λέμε ότι το ΣΗΜΕΙΟ έχει μηδενική διάσταση.)

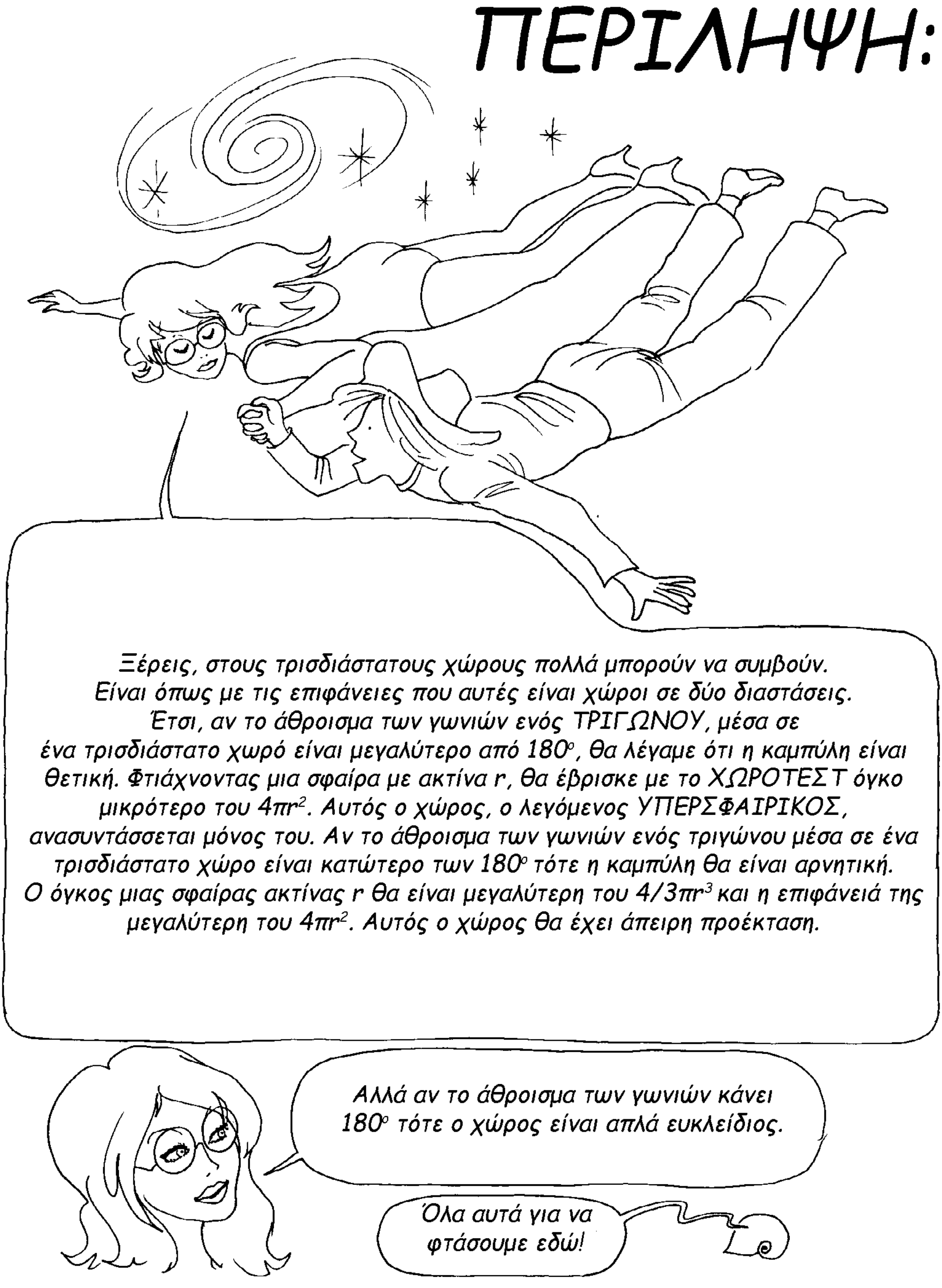


Μία σφαίρα θα μπορούσε να θεωρηθεί σα μία διασταύρωση δύο τρισδιάστατων φουσκών εξελισσόμενες μέσα σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων.

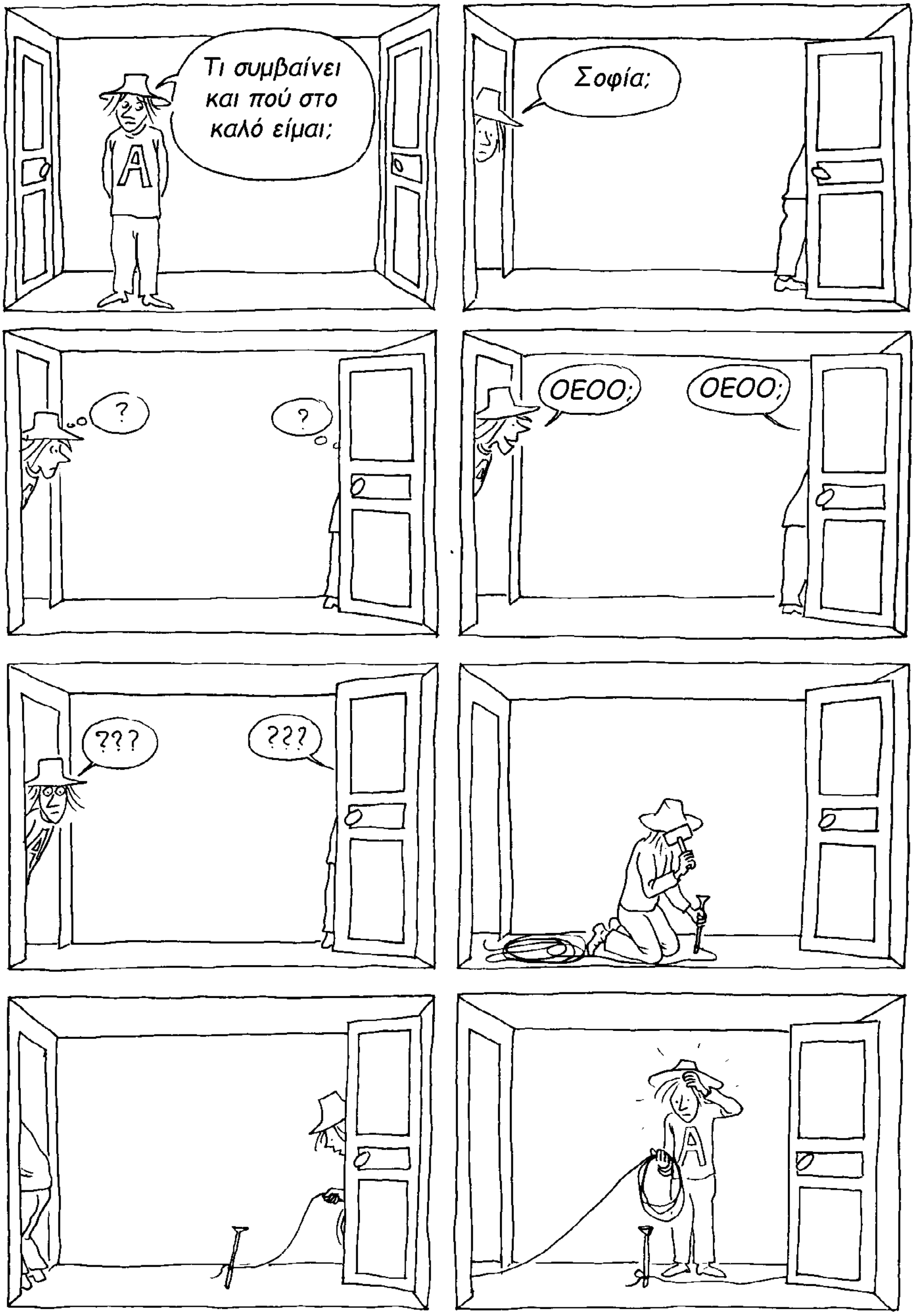
Και έτσι συνεχίζουμε: ένας τρισδιάστατος καμπυλωτός χώρος, υπερσφαιρικός, θα μπορούσε από μόνος του να θεωρηθεί σα μία διασταύρωση δύο σαπουνόφουσκων σε τέσσερις διαστάσεις εξελισσόμένες μέσα σε ένα χώρο πέντε διαστάσεων.

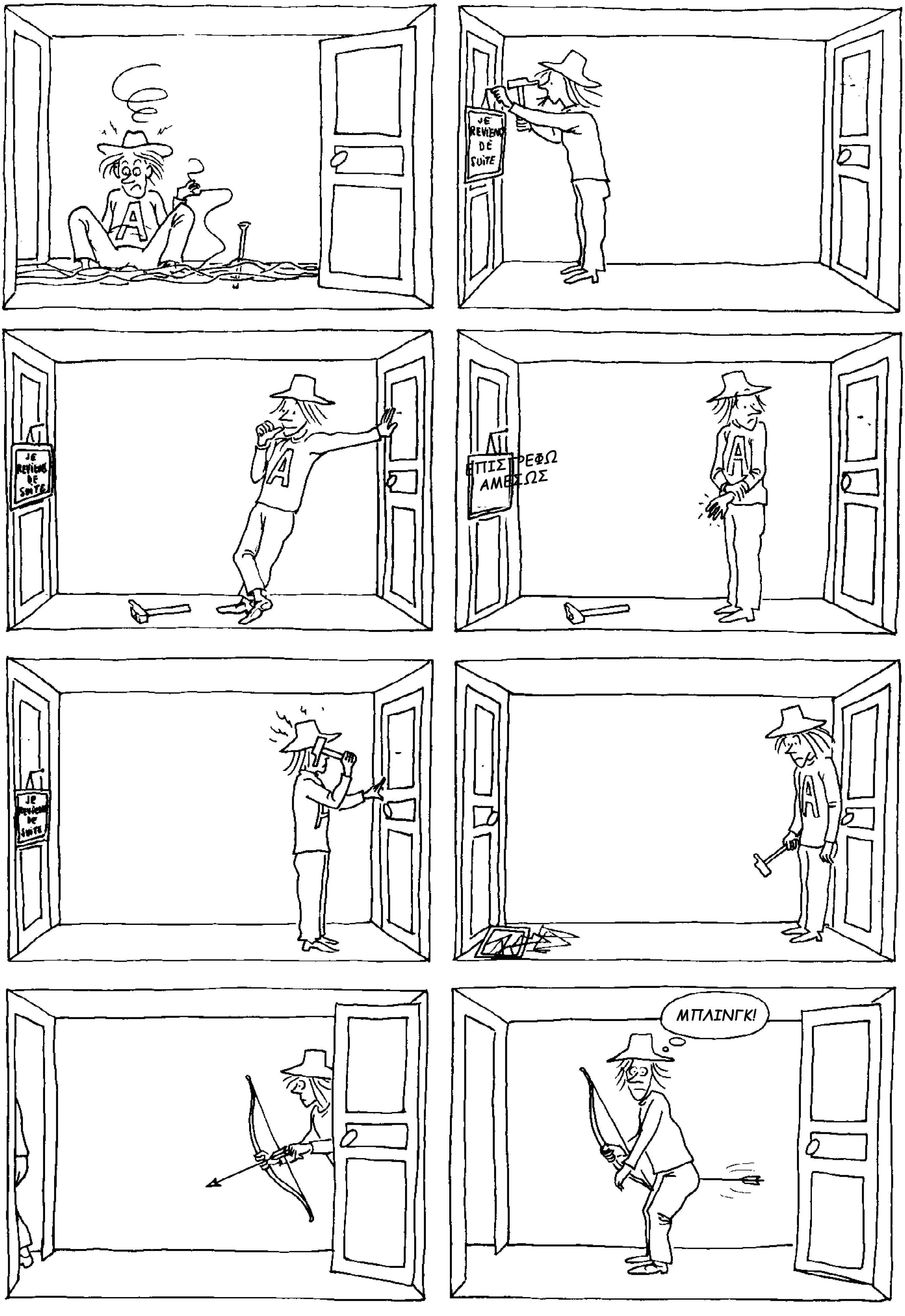
Ο Ζαχαρίας και η Σοφία αφού γνώρισαν τις σπαζοκεφαλιές της επαγωγής ξαναπιάστηκαν με την εξερεύνηση άλλων τρισδιάστατων χώρων.




ΠΕΡΙΛΗΨΗ:
Ξέρεις, στους τρισδιάστατους χώρους πολλά μπορούν να συμβούν. Είναι όπως με τις επιφάνειες που αυτές είναι χώροι σε δύο διαστάσεις. Έτσι, αν το άθροισμα των γωνιών ενός ΤΡΙΓΩΝΟΥ, μέσα σε ένα τρισδιάστατο χωρό είναι μεγαλύτερο από 180^{o}, θα λέγαμε ότι η καμπύλη είναι θετική. Φτιάχνοντας μια σφαίρα με ακτίνα r, θα έβρισκε με το ΧΩΡΟΤΕΣΤ όγκο μικρότερο του $4\pi r^{2}$. Αυτός ο χώρος, ο λεγόμενος ΥΠΕΡΣΦΑΙΡΙΚΟΣ, ανασυντάσσεται μόνος του. Αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου μέσα σε ένα τρισδιάστατο χώρο είναι κατώτερο των 180^{o} τότε η καμπύλη θα είναι αρνητική. Ο όγκος μιας σφαίρας ακτίνας r θα είναι μεγαλύτερη του $4/3\pi r^{3}$ και η επιφάνειά της μεγαλύτερη του $4\pi r^{2}$. Αυτός ο χώρος θα έχει άπειρη προέκταση.
Αλλά αν το άθροισμα των γωνιών κάνει 180^{o} τότε ο χώρος είναι απλά ευκλείδιος.
Όλα αυτά για να φτάσουμε εδώ!

ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΙΤΕ ΑΝΟΙΚΤΟ ΕΙΤΕ ΚΛΕΙΣΤΟ!...


Τι συμβαίνει και πού στο καλό είμαι;
Σοφία;
?
?
ΟΕΟΟ;
ΟΕΟΟ;
???
???


JE REVIENS DE SUITE
JE REVIENS DE SUITE
ΕΠΙΣΤΡΕΦΩ ΑΜΕΣΩΣ
JE REVIENS DE SUITE
ΜΠΛΙΝΓΚ!


Και ναι! Ο Ζαχαρίας είχε εκτοξευθεί σε ένα τρισδιάστατο κυλινδρικό χώρο. Αν και ευκλείδιος, χωρίς καμπύλη, (το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°) αυτός ο κόσμος ξανάκλεινε μόνος του.
ΜΠΑΙΝΓΚ
Λοιπόν, καταλήγουμε... σφαιρικοί κόσμοι, υπερβολικοί, κυλινδρικοί. Έχουμε κάνει την ξενάγηση. Όχι;
Το πιστεύετε;
Ας πραγματοποιήσουμε μια μικρή επανάληψη στο δισδιάστατο.
Εεε;!
ΣΥΝΝΕΦΑ

ΧΩΡΙΣ ΠΑΝΩ ΚΑΤΩ


Αυτό ξανακλείνει αυτοστιγμεί!

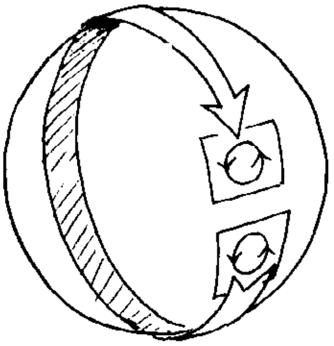

Σύνολο γωνιών: 180°. Είναι ευκλείδιο αυτό το μαραφέτι. Ακόμη το πλήγμα του κυλίνδρου!

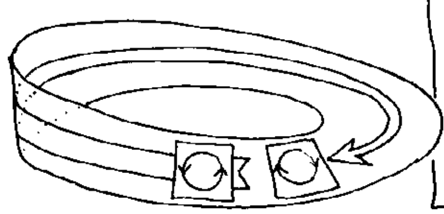
Ε όχι!...


!?!
Αυτό λοιπόν!

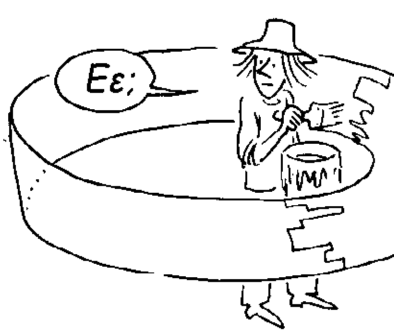

Για να σας πούμε τα πάντα, ο Ζαχαρίας αυτή τη φορά βρέθηκε σε ένα ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΟ ΧΩΡΟ.
Η πιο γνωστή εικόνα ενός τέτοιου χώρου είναι η λωρίδα του Μόμπιους (1830).
Η ιδέα είχε διαφύγει από τους Έλληνες οι οποίοι παρόλ' αυτά έχουν σκεφτεί τα πάντα.
ΣΗΜΕΙΟ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΥ
Σοφία, βγάλε με από δω πέρα!

Σχεδιάζουμε ένα κύκλο πάνω σε μία επιφάνεια και δείχνουμε αυθαίρετα την κατεύθυνση με ένα βέλος. Φανταζόμαστε ότι αυτός ο κύκλος είναι μία μικρή χαλκομανία την οποία μπορούμε να κάνουμε να γλιστρήσει κατά βούληση πάνω στην επιφάνεια. Αν ο κύκλος βρεθεί απαράλλαχτος με τον εαυτό του λέμε ότι αυτή η επιφάνεια είναι ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΗ. (Είναι οι περιπτώσεις της σφαίρας, του κυλίνδρου, του επιπέδου, κ.λ.π.) Αλλά αν αυτή η χαλκομανία γλιστρήσει πάνω σε μία λωρίδα του Μόμπιους, όλα θα κυλήσουν αλλιώς.





Για κάθε φορά που κάνει το γύρο αυτού του δισδιάστατου σύμπαντος ο κύκλος αλλάζει προσανατολισμό.



Συσχετικά, δε μπορούμε να απεικονίσουμε μια λωρίδα του Μόμπιους με δύο διαφορετικά χρώματα: δεν έχει παρά μόνο μία πλευρά, είναι ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ.

Δεν έχει παρά μόνο μία ΑΚΡΗ:

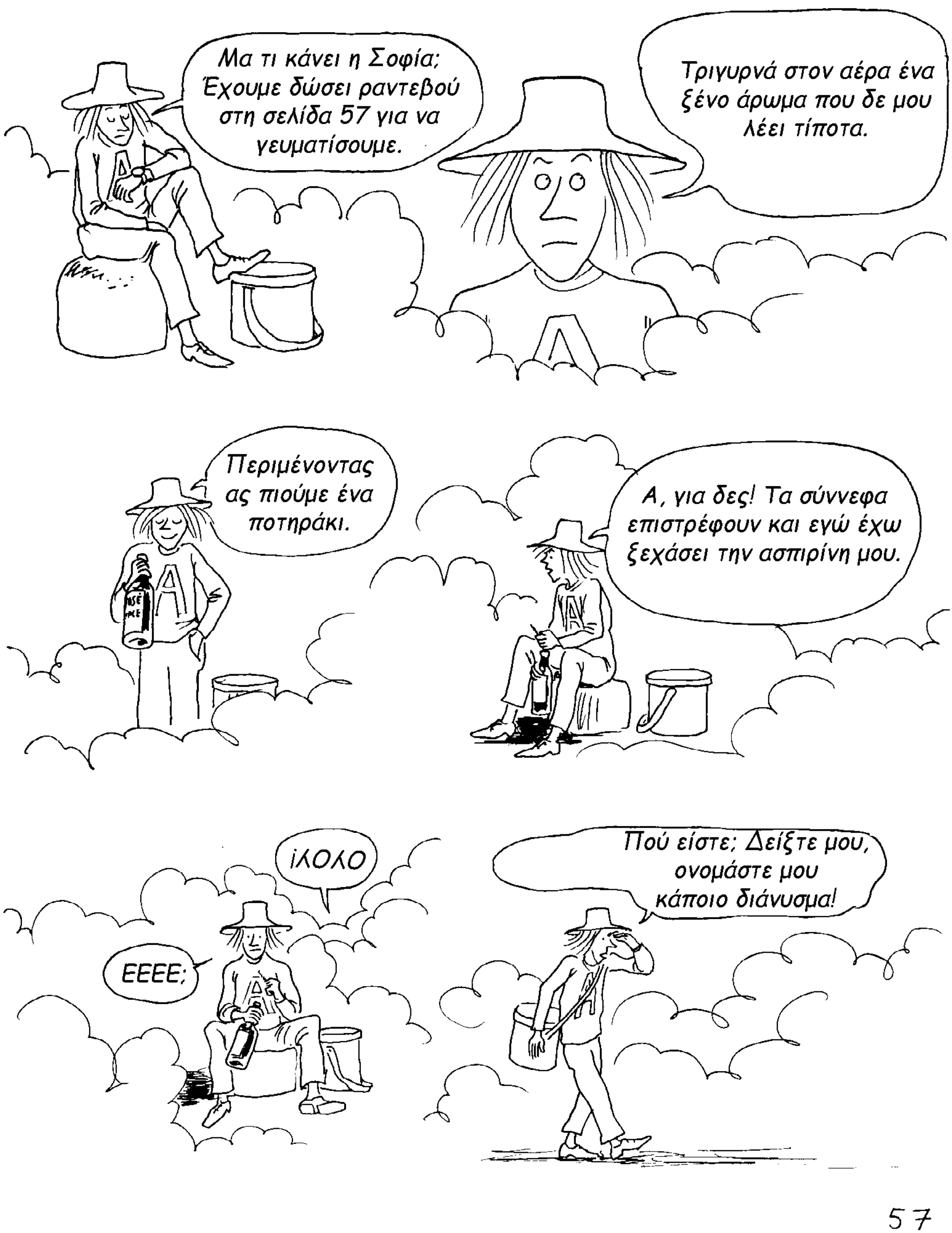
Μπορούμε να το στριφώσουμε με μία μόνο φορά.


Ας δοκιμάσουμε να την κόψουμε στα δύο.
Ζαχαρία, φίλε μου, είναι πιο εύκολο να το λες παρά να το κάνεις.
Μα τι πρέπει να κάνουμε για να το κόψουμε στα δύο;
Είναι πάρα πολύ απλό. Την κόβεις στα τρία!
Να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια αυτής της δοκιμασίας αυτό το μαραφέτι έγινε αμφίπλευρο.
Αισθάνομαι εντελώς αποπροσανατολισμένος.
Σημειώστε ότι τώρα υπάρχει ένα μονόπλευρο μαραφέτι (το λευκό) και ένα άλλο αμφίπλευρο (το γκρι) με διπλάσιο μήκος από το αρχικό.

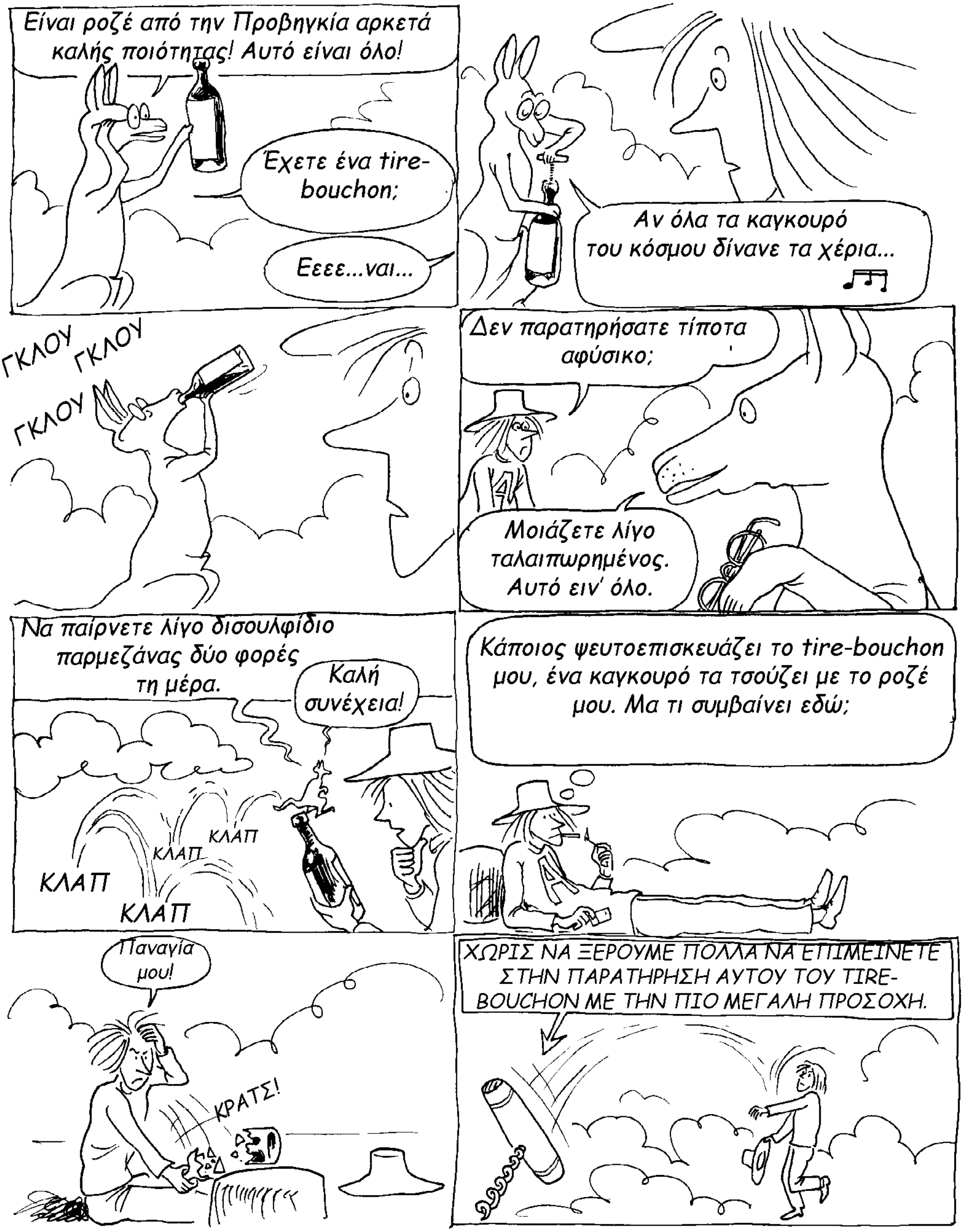
Μετά από αυτή τη βόλτα μέσα στη λωρίδα του Μόμπιους, ξαναγυρνάμε στον τρισδιάστατο ευκλείδιο χώρο (χωρίς καμπύλη).

Προσανατολισμός μέσα στο χώρο

Συνοδεύοντας τον Τουλούμπα στην εξερεύνησή του για ένα νέο τρισδιάστατο ευκλείδιο κόσμο (χωρίς καμπύλη)...

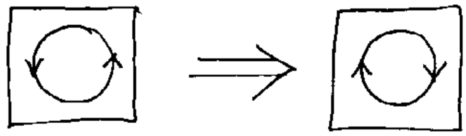


Θα κάνω μερικά τεστ.
Άθροισμα γωνιών 180°.
Επιφάνεια $4\pi r^2$ Όγκος $4/3\pi r^3$ Ωραία, επιστρέφουμε.
Είναι ευκλείδιο.
Αυτό θα πει τύχη! Διακρίνω το μπουκάλι μου.
Τι συμβαίνει με αυτό το αναθεματισμένο το tire-bouchon;
Ωστόσο το αναγνωρίζω. Είναι το δικό μου.
Μα τι συμβαίνει;
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΤΕ ΚΑΛΑ
Κάποιο πρόβλημα;
Έχω..εεε...

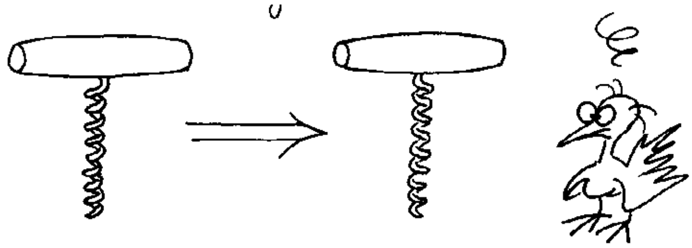


Είναι ροζέ από την Προβηγκία αρκετά καλής ποιότητας! Αυτό είναι όλο!
Έχετε ένα tire-bouchon;
Εεεε...ναι...
Αν όλα τα καγκουρό του κόσμου δίνανε τα χέρια...
ΓΚΛΟΥ ΓΚΛΟΥ ΓΚΛΟΥ
Δεν παρατηρήσατε τίποτα αφύσικο;
Μοιάζετε λίγο ταλαιπωρημένος. Αυτό ειν' όλο.
Να παίρνετε λίγο δισουλφίδιο παρμεζάνας δύο φορές τη μέρα.
Καλή συνέχεια!
ΚΛΑΠ ΚΛΑΠ ΚΛΑΠ ΚΛΑΠ
Κάποιος ψευτοεπισκευάζει το tire-bouchon μου, ένα καγκουρό τα τσούζει με το ροζέ μου. Μα τι συμβαίνει εδώ;
Παναγία μου!
ΚΡΑΤΣ!
ΧΩΡΙΣ ΝΑ ΞΕΡΟΥΜΕ ΠΟΛΛΑ ΝΑ ΕΠΙΜΕΙΝΕΤΕ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ TIRE-BOUCHON ΜΕ ΤΗΝ ΠΙΟ ΜΕΓΑΛΗ ΠΡΟΣΟΧΗ.

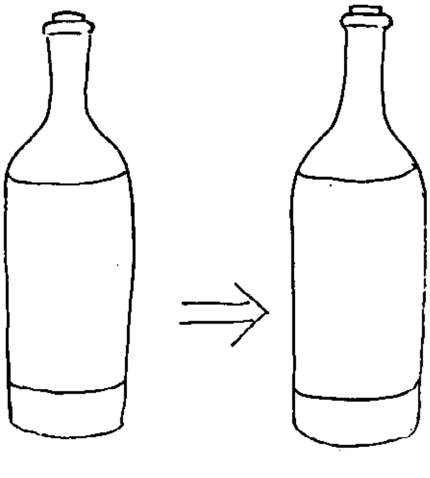
Η λωρίδα του Μόμπιους (δισδιάστατος χώρος μη προσανατολίσιμος) έχει λοιπόν έναν αντίστοιχο τρισδιάστατο. Πάνω στη λωρίδα του Μόμπιους όταν ο κύκλος της χαλκομανίας έκανε το "γύρο"αυτού του ευκλείδιου χώρου, ο προσανατολισμός του άλλαξε.



Βλέπε τη σελίδα 54



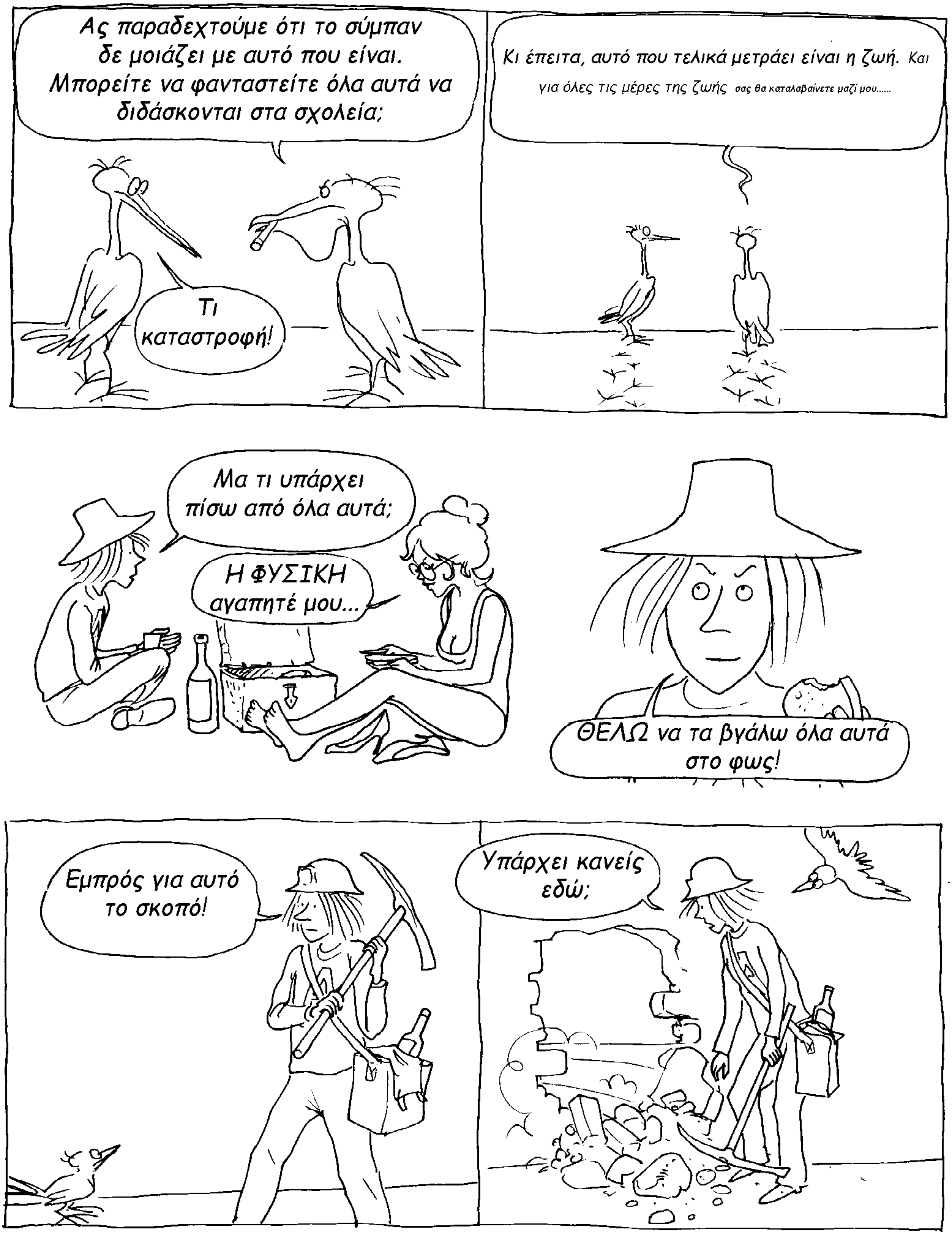
Παρατηρούμε ότι αυτά τα αντικείμενα είναι "στον καθρέφτη". Το tire-bouchon, ή και ο ίδιος ο Ζαχαρίας, μπορούν να θεωρηθούν σαν "τρισδιάστατες χαλκομανίες". Κάθε φορά που ένα αντικείμενο κάνει το "γύρο" αυτού του τρισδιάστατου χώρου, ο προσανατολισμός του αντιστρέφεται. Όπως προσποιηθήκαμε ότι έχουμε συνοδεύσει τον Τουλούμπα στο διαστημικό του περίπλου, έτσι είναι φυσιολογικό να ξαναβρούμε μαζί του, το μπουκάλι καθρεφτιζόμενο και το tire-bouchon να συμπεριφέρεται ασυνήθιστα. Ένας δεύτερος "γύρος" αυτού του σύμπαντος μας ξαναδίνει την πρωταρχική οπτική των πραγμάτων (υπό την προϋπόθεση ότι αφήνουμε τα αντικείμενα στη θέση τους).



Ο Ζαχαρίας και το καγκουρό (από την οικογένεια των μακρόποδων) μένουν στον ίδιο χώρο αλλά διαφέρουν με την έννοια ότι αυτός που είναι "στο χώρο για το καγκουρό" είναι "απέναντι για τον Τουλούμπα" και το αντίστροφο

ΕΠΙΛΟΓΟΣ:


Όλα πάνε στραβά. Δεν υπάρχει πια ούτε δεξιά, ούτε αριστερά, ούτε καλή μεριά, ούτε ανάποδη. Προς τα πού οδηγούν όλα αυτά; Και ποιο μονοπάτι να ακολουθήσεις;
Πρέπει να ακολουθήσεις τα γεωδαιτικά, Ζαχαρία. Τα γεωδαιτικά της ζωής σου.
Δε θα σκεφτόμουν ποτέ ότι το σύμπαν είναι τόσο ακατανόητο. Γι' αυτό παθαίνουν ντελίριουμ οι μαθηματικοί!
Είναι καρτούν!
Γιατί καταπιαστήκαμε με όλα αυτά από τη στιγμή που είναι προφανές ότο ο χώρος ΕΙΝΑΙ ευκλείδιος*;
(*)Απόφαση που πάρθηκε το 1830 από τον Οστρογκράντσκι, επίτιμο καθηγητή μαθηματικών στην Πέτρογκραντ, μετά από μελέτη των έργων του Ρήμαν και του Λομπατσέφσκι.


Ας παραδεχτούμε ότι το σύμπαν δε μοιάζει με αυτό που είναι. Μπορείτε να φανταστείτε όλα αυτά να διδάσκονται στα σχολεία;
Τι καταστροφή!
Κι έπειτα, αυτό που τελικά μετράει είναι η ζωή. Και για όλες τις μέρες της ζωής σας θα καταλαβαίνετε μαζί μου......
Μα τι υπάρχει πίσω από όλα αυτά;
Η ΦΥΣΙΚΗ αγαπητέ μου...
ΘΕΛΩ να τα βγάλω όλα αυτά στο φως!
Εμπρός για αυτό το σκοπό!
Υπάρχει κανείς εδώ;


...αν η μέση πυκνότητα του υλικού μέσα στο σύμπαν είναι μικρότερη από 10-29 gr ανά cm3....
?
....τότε το σύμπαν θα έχει αρνητική καμπύλη και θα είναι άπειρης έκτασης...
εν αντιθέσει, αν η πυκνότητα είναι μεγαλύτερη από 10-29 gr/cm3
!..
το σύμπαν θα ήταν υπερσφαιρικό και θα ξανάκλεινε στον εαυτό του....
Αλλά αν αυτή η πυκνότητα είναι ίση με 10-29 gr/cm3 τότε το σύμπαν θα είναι ευκλείδιο...
Εεεεε;
Ο Δόκτωρ Αϊνστάιν να υποθέσω;
Μμναι;
ΤΕΛΟΣ